Concentración de masa para un modelo de quimiotaxis con dos especies

Julio Valencia Guevara

Universidad Nacional de San agustín de Arequipa - UNSA

Seminario Internacional de Matemáticas

Modelo para Quimiotaxis

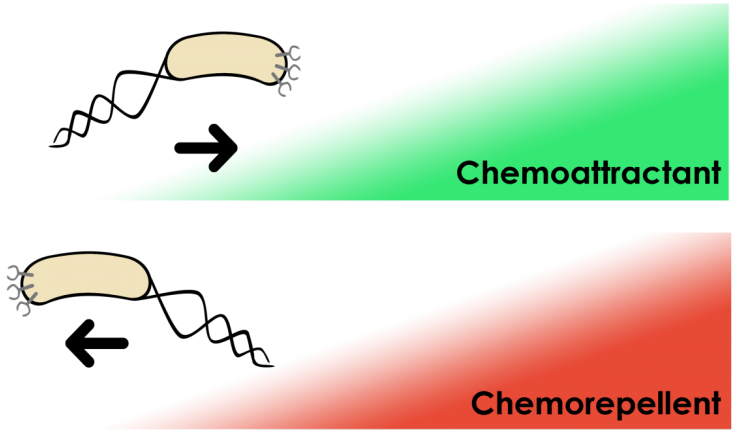
Colapso para una especie

Colapso para dos especies

Concentración para dos especies con termino fuente lineal

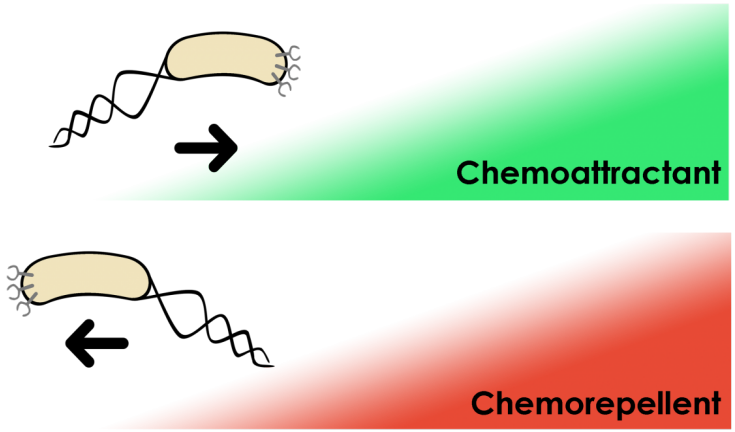
Ecuación de Keller-Segel

Mecanismo de quimiotaxis:



Ecuación de Keller-Segel

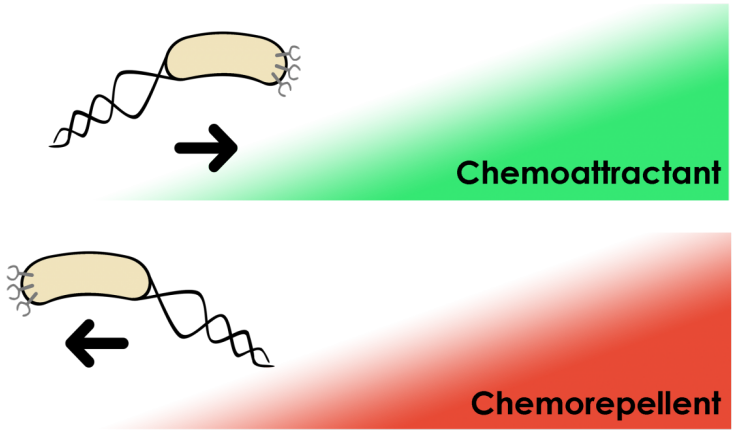
Mecanismo de quimiotaxis:



- ρ : densidad de la población del organismo,

Ecuación de Keller-Segel

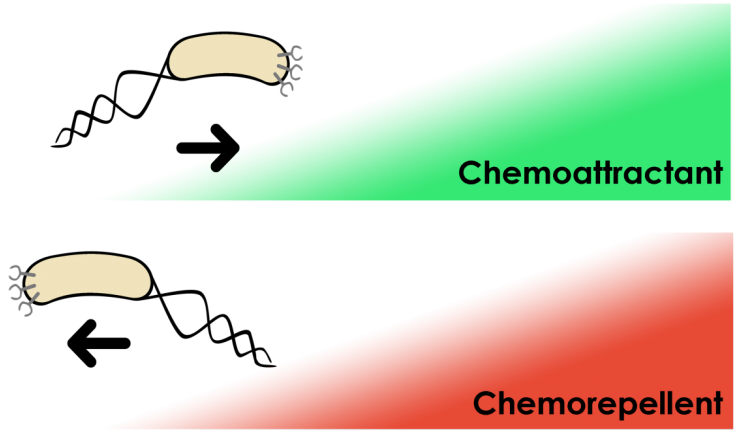
Mecanismo de quimiotaxis:



- ρ : densidad de la población del organismo,
- v : concentración química del quimioatractor

Ecuación de Keller-Segel

Mecanismo de quimiotaxis:



- ρ : densidad de la población del organismo,
- v : concentración química del quimioatractor
- α : sensitividad del organismo a la sustancia, $\alpha > 0$ quimio-atractor, $\alpha < 0$ quimio-repulsor

Ecuación de Keller-Segel

Modelo matemático básico

Ecuación de Keller-Segel

Modelo matemático básico

Para ρ,

1. **Ley de Fick:** El organismo ρ se mueve de su mayor hacia su menor concentración, $-\nabla\rho$.

Ecuación de Keller-Segel

Modelo matemático básico

Para ρ,

1. **Ley de Fick:** El organismo ρ se mueve de su mayor hacia su menor concentración, $-\nabla\rho$.
2. **Ley de Fourier**: El organismo se mueve en la dirección $\alpha\rho\nabla v$

Ecuación de Keller-Segel

Modelo matemático básico

Para ρ,

1. **Ley de Fick:** El organismo ρ se mueve de su mayor hacia su menor concentración, $-\nabla\rho$.
2. **Ley de Fourier**: El organismo se mueve en la dirección $\alpha\rho\nabla v$

Como una consecuencia el campo que determina el flujo de la densidad de población es:

$$\mathcal{J}_\rho = -\nabla\rho + \alpha\rho\nabla v.$$

Ecuación de Keller-Segel

Modelo matemático básico

Para ρ,

1. **Ley de Fick:** El organismo ρ se mueve de su mayor hacia su menor concentración, $-\nabla\rho$.
2. **Ley de Fourier**: El organismo se mueve en la dirección $\alpha\rho\nabla v$

Como una consecuencia el campo que determina el flujo de la densidad de población es:

$$\mathcal{J}_\rho = -\nabla\rho + \alpha\rho\nabla v.$$

Usando el principio de conservación de masa se obtiene:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \Delta\rho - \alpha\nabla\cdot(\rho\nabla v).$$

Ec. Keller-Segel

Para v,

1. **Difusión**: El quimio-atractor posee un flujo de concentración de $\mathcal{J}_v = D\nabla v$

Ec. Keller-Segel

Para v,

1. **Difusión**: El quimio-atractor posee un flujo de concentración de $\mathcal{J}_v = D\nabla v$
2. **Producción**: La población ρ produce el quimio-atractor a una razón de $\beta\rho$, $\beta = \alpha D > 0$ constante.

Ec. Keller-Segel

Para v,

1. **Difusión**: El quimio-atractor posee un flujo de concentración de $\mathcal{J}_v = D\nabla v$
2. **Producción**: La población ρ produce el quimio-atractor a una razón de $\beta\rho$, $\beta = \alpha D > 0$ constante.

Usando la ecuación de balance tenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v + \beta\rho.$$

Sistema para multi-especies

Debido la diferencia entre la difusión de ρ y v, podemos asumir que $D \gg 1$, lo que nos lleva al sistema acoplado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} &= \Delta \rho - \alpha \nabla \cdot (\rho \nabla v), & \text{for } (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ -\Delta v &= \alpha \rho, & \text{for } (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \rho(x,0) &= \rho_0(x) \geq 0 & \text{for } x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

Sistema para multi-especies

Debido la diferencia entre la difusión de ρ y v, podemos asumir que $D \gg 1$, lo que nos lleva al sistema acoplado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} &= \Delta \rho - \alpha \nabla \cdot (\rho \nabla v), & \text{for } (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ -\Delta v &= \alpha \rho, & \text{for } (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \rho(x,0) &= \rho_0(x) \geq 0 & \text{for } x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

De forma similar para una cantidad arbitraria de de especies $\rho_1, \cdots, \rho_N$ se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_i}{\partial t} &= \Delta \rho_i - \alpha_i \nabla \cdot (\rho_i \nabla v) + H_i(\overrightarrow{\rho}), & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ -\Delta v &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \rho_j, & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \nabla \rho_i \cdot \overrightarrow{n} = \nabla v \cdot \overrightarrow{n} &= 0, \ v = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0,T), \\ \rho_i(x,0) &= \rho_{0,i}(x) \geq 0 & \text{for } x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

donde H_i representan términos de degradación.

Sistema para multi-especies

Debido la diferencia entre la difusión de ρ y v, podemos asumir que $D \gg 1$, lo que nos lleva al sistema acoplado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} &= \Delta \rho - \alpha \nabla \cdot (\rho \nabla v), & \text{for } (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ -\Delta v &= \alpha \rho, & \text{for } (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \rho(x,0) &= \rho_0(x) \geq 0 & \text{for } x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

De forma similar para una cantidad arbitraria de de especies $\rho_1, \cdots, \rho_N$ se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_i}{\partial t} &= \Delta \rho_i - \alpha_i \nabla \cdot (\rho_i \nabla v) + H_i(\overrightarrow{\rho}), & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ -\Delta v &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \rho_j, & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \nabla \rho_i \cdot \overrightarrow{n} = \nabla v \cdot \overrightarrow{n} &= 0, \ v = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0,T), \\ \rho_i(x,0) &= \rho_{0,i}(x) \geq 0 & \text{for } x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

donde H_i representan términos de degradación. Deducción completa en Horstman (2011)[9].

Colapso para una especie

1. Existencia local de solución puede ser demostrado por un argumento clásico de punto fijo.

Colapso para una especie

1. Existencia local de solución puede ser demostrado por un argumento clásico de punto fijo.
2. Childress y Percus (1981)[3] conjeturaron: existe $d_\Omega > 0$ tal que si $m_0 < d_\Omega$, existe $\rho(x,t)$ global y acotada.

Colapso para una especie

1. Existencia local de solución puede ser demostrado por un argumento clásico de punto fijo.
2. Childress y Percus (1981)[3] conjeturaron: existe $d_\Omega > 0$ tal que si $m_0 < d_\Omega$, existe $\rho(x,t)$ global y acotada. Existe $D_\Omega \geq d_\Omega$ tal que si $m_0 > D_\Omega$, $\rho(t)$ colapsa en un $\delta-$Dirac en tiempo finito.

Colapso para una especie

1. Existencia local de solución puede ser demostrado por un argumento clásico de punto fijo.
2. Childress y Percus (1981)[3] conjeturaron: existe $d_\Omega > 0$ tal que si $m_0 < d_\Omega$, existe $\rho(x,t)$ global y acotada. Existe $D_\Omega \geq d_\Omega$ tal que si $m_0 > D_\Omega$, $\rho(t)$ colapsa en un $\delta-$Dirac en tiempo finito.
3. Jagër y Lukchaus (1992)[11] demostraron el hecho anterior cuando Ω es el disco unitario. Probaron el colapso de solución radial.

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho - \alpha \nabla \cdot (\rho \nabla v); & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ -\Delta v = \rho - 1; & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho \cdot \overrightarrow{\eta} = 0; & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{3}$$

Colapso para una especie

Denote,

$$m_0 = \int_\Omega \rho_0(x)\ dx.$$

Colapso para una especie

Denote,

$$m_0 = \int_\Omega \rho_0(x)\, dx.$$

Teorema 1

1. *Existe* $C(\Omega) > 0$ *tal que si* $m_0\alpha < C(\Omega)$ *entonces existe una única solución positiva, diferenciable definida en* $[0, T]$ *para todo* $T > 0$.

Colapso para una especie

Denote,

$$m_0 = \int_\Omega \rho_0(x)\, dx.$$

Teorema 1

1. *Existe* $C(\Omega) > 0$ *tal que si* $m_0\alpha < C(\Omega)$ *entonces existe una única solución positiva, diferenciable definida en* $[0, T]$ *para todo* $T > 0$.

2. *Si* $\Omega = B((0,0);1)$, *existe* $c^* > 0$ *tal que si* $m_0\alpha > c^*$ *es posible encontrar una solución radial que concentra masa (Blowing-up) en el origen* $(0,0)$, *en un tiempo finito.*

Colapso para una especie

Seguidamente en Dolbeault y Perthame (2004)[5] consideraron el sistema en dimensión 2.

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho - \alpha \nabla \cdot (\rho \nabla v); & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T) \\ -\Delta v = \rho; & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T) \\ \rho(x,0) = \rho_0(x); & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{4}$$

Colapso para una especie

Seguidamente en Dolbeault y Perthame (2004)[5] consideraron el sistema en dimensión 2.

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho - \alpha \nabla \cdot (\rho \nabla v); & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T) \\ -\Delta v = \rho; & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T) \\ \rho(x,0) = \rho_0(x); & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{4}$$

Lema 1

Si ρ es una solución distribucional de (4) tal que,

$$m_0 = \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x,t)\,dx,\ \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x,t)\,dx < \infty \text{ y } \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1+|x|}{|x-y|}\rho(y,t)\,dy \leq C.$$

Entonces,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x,t)\ dx = 4m_0\left(1 - \frac{\alpha}{8\pi} m_0\right).$$

Colapso para una especie

Como consecuencia.

Teorema 2

Bajo las mismas condiciones del Lema 1, si $\alpha m_0 > 8\pi$, entonces el segundo momento

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x,t)\ dx,$$

se anula en tiempo finito.

Colapso para una especie

Como consecuencia.

Teorema 2

Bajo las mismas condiciones del Lema 1, si $\alpha m_0 > 8\pi$, entonces el segundo momento

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x,t)\ dx,$$

se anula en tiempo finito.

Usando un método de entropía, Dolbeault y Perthame (2004)[5] tambien demostraron que si $\alpha m_0 < 8\pi$ entonces la solución distribucional existe para todo $t > 0$.

Colapso para una especie: masa crítica

1. Blanchet, Carrillo y Nasmoudi (2008) mostraron que cuando $\alpha m_0 = 8\pi$ existen soluciones que colapsan hacia un delta Dirac concentrado en el centro de masa, cuando $t \to \infty$.

Colapso para una especie: masa crítica

1. Blanchet, Carrillo y Nasmoudi (2008) mostraron que cuando $\alpha m_0 = 8\pi$ existen soluciones que colapsan hacia un delta Dirac concentrado en el centro de masa, cuando $t \to \infty$.

2. Blanchet, Carlen y Carrillo (2010) mostraron que cuando $\alpha m_0 = 8\pi$ existen soluciones estacionarias (a un parámetro) de (4) y soluciones con segundo momento infinito que convergen a dichos estados estacionarios.

Colapso para dos especies

En Espejo, et al(2009)[7] se estudia el sistema:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 = \Delta \rho_1 - \alpha_1 \nabla \cdot (\rho_1 \nabla v); & (x,t) \in B((0,0),R) \times (0,T) \\ \partial_t \rho_2 = \mu_2 \Delta \rho_2 - \alpha_2 \nabla \cdot (\rho_2 \nabla v); & (x,t) \in B((0,0),R) \times (0,T) \\ -\Delta v = \rho_1 + \rho_2 - 1; & (x,t) \in B((0,0),R) \times (0,T) \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_1 \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_2 \cdot \overrightarrow{\eta} = 0; & (x,t) \in \partial B((0,0),R) \times (0,T) \\ \rho_1(x,0) = \rho_{01}(x), \ \rho_2(x,0) = \rho_{02}(x); & x \in B((0,0),R). \end{cases} \tag{5}$$

Colapso para dos especies

En Espejo, et al(2009)[7] se estudia el sistema:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 = \Delta \rho_1 - \alpha_1 \nabla \cdot (\rho_1 \nabla v); & (x,t) \in B((0,0),R) \times (0,T) \\ \partial_t \rho_2 = \mu_2 \Delta \rho_2 - \alpha_2 \nabla \cdot (\rho_2 \nabla v); & (x,t) \in B((0,0),R) \times (0,T) \\ -\Delta v = \rho_1 + \rho_2 - 1; & (x,t) \in B((0,0),R) \times (0,T) \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_1 \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_2 \cdot \overrightarrow{\eta} = 0; & (x,t) \in \partial B((0,0),R) \times (0,T) \\ \rho_1(x,0) = \rho_{01}(x), \ \rho_2(x,0) = \rho_{02}(x); & x \in B((0,0),R). \end{cases} \tag{5}$$

- Espejo, et al(2009)[7] demuestran que si una especie colapsa en tiempo finito, entonces también lo hace la otra en el mismo tiempo.

Colapso para dos especies

En Espejo, et al(2009)[7] se estudia el sistema:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 = \Delta \rho_1 - \alpha_1 \nabla \cdot (\rho_1 \nabla v); & (x,t) \in B((0,0),R) \times (0,T) \\ \partial_t \rho_2 = \mu_2 \Delta \rho_2 - \alpha_2 \nabla \cdot (\rho_2 \nabla v); & (x,t) \in B((0,0),R) \times (0,T) \\ -\Delta v = \rho_1 + \rho_2 - 1; & (x,t) \in B((0,0),R) \times (0,T) \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_1 \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_2 \cdot \overrightarrow{\eta} = 0; & (x,t) \in \partial B((0,0),R) \times (0,T) \\ \rho_1(x,0) = \rho_{01}(x), \ \rho_2(x,0) = \rho_{02}(x); & x \in B((0,0),R). \end{cases} \tag{5}$$

- Espejo, et al(2009)[7] demuestran que si una especie colapsa en tiempo finito, entonces también lo hace la otra en el mismo tiempo.Posible diferencia es que una colapsa en un punto y la otra posee densidad no acotada.

Colapso para dos especies

Denote,

$$m_{0i} = \int_{B((0,0),R)} \rho_{0i}(x)\ dx,\ \ i = 1, 2.$$

Colapso para dos especies

Denote,

$$m_{0i} = \int_{B((0,0),R)} \rho_{0i}(x)\ dx,\ \ i = 1, 2.$$

- En Conca, et al(2011)[4] consideran (5) en $\mathbb{R}^2$ y demuestran que existe colapso de especies bajo cualquiera de las siguientes condiciones:

Colapso para dos especies

Denote,

$$m_{0i} = \int_{B((0,0),R)} \rho_{0i}(x)\ dx,\ \ i = 1, 2.$$

- En Conca, et al(2011)[4] consideran (5) en $\mathbb{R}^2$ y demuestran que existe colapso de especies bajo cualquiera de las siguientes condiciones:

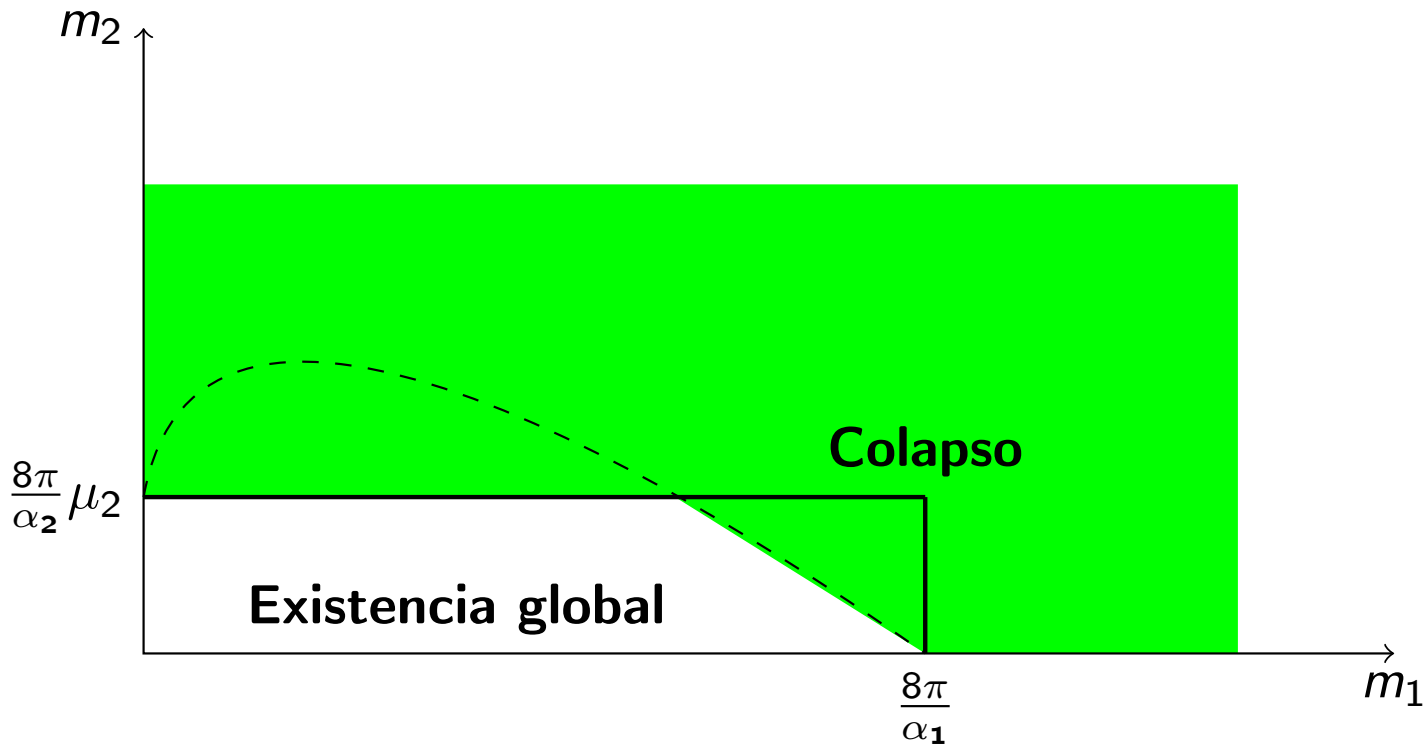
$$\begin{aligned} 8\pi \left(\frac{1}{\alpha_1} m_{01} + \frac{\mu_2}{\alpha_2} m_{02} \right) &< (m_{01} + m_{0,2})^2 \\ \frac{8\pi}{\alpha_1} &< m_{01} \\ \frac{8\pi}{\alpha_2} \mu_2 &< m_{02},\ \ (\mu_2 \geq 1) \end{aligned}$$

Colapso para dos especies

- Posteriormente en Espejo, et al(2013)[6] probaron que estas condiciones son finas en el sentido del siguiente cuadro:

Colapso para dos especies

- Posteriormente en Espejo, et al(2013)[6] probaron que estas condiciones son finas en el sentido del siguiente cuadro:



Concentración para dos especies con termino fuente lineal

Consideremos el sistema con término de degradación (o mortalidad, o fuente) lineal:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 = \Delta \rho_1 - \alpha_1 \nabla \cdot (\rho_1 \nabla v) - c_1 \rho_1; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \partial_t \rho_2 = \Delta \rho_2 - \alpha_2 \nabla \cdot (\rho_2 \nabla v) - c_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ -\Delta v = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_1 \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_2 \cdot \overrightarrow{\eta} = 0; & (x,t) \in \partial B((0,0),1) \times (0,T) \\ \rho_1(x,0) = \rho_{01}(x), \ \rho_2(x,0) = \rho_{02}(x); & x \in B((0,0),1). \end{cases} \tag{6}$$

Concentración para dos especies con termino fuente lineal

Consideremos el sistema con término de degradación (o mortalidad, o fuente) lineal:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 = \Delta \rho_1 - \alpha_1 \nabla \cdot (\rho_1 \nabla v) - c_1 \rho_1; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \partial_t \rho_2 = \Delta \rho_2 - \alpha_2 \nabla \cdot (\rho_2 \nabla v) - c_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ -\Delta v = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_1 \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_2 \cdot \overrightarrow{\eta} = 0; & (x,t) \in \partial B((0,0),1) \times (0,T) \\ \rho_1(x,0) = \rho_{01}(x), \ \rho_2(x,0) = \rho_{02}(x); & x \in B((0,0),1). \end{cases} \tag{6}$$

Si $\Lambda = \frac{(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})^2}{8\pi(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})}$, tenemos concentración en cualquier caso:

Concentración para dos especies con termino fuente lineal

Consideremos el sistema con término de degradación (o mortalidad, o fuente) lineal:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 = \Delta \rho_1 - \alpha_1 \nabla \cdot (\rho_1 \nabla v) - c_1 \rho_1; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \partial_t \rho_2 = \Delta \rho_2 - \alpha_2 \nabla \cdot (\rho_2 \nabla v) - c_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ -\Delta v = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_1 \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_2 \cdot \overrightarrow{\eta} = 0; & (x,t) \in \partial B((0,0),1) \times (0,T) \\ \rho_1(x,0) = \rho_{01}(x), \ \rho_2(x,0) = \rho_{02}(x); & x \in B((0,0),1). \end{cases} \tag{6}$$

Si $\Lambda = \frac{(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})^2}{8\pi(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})}$, tenemos concentración en cualquier caso:

1. $\Lambda > 1$ and $\frac{2c}{C} - 4 \leq \Lambda^{\frac{c}{2C-c}} \left(\frac{2c}{C} \Lambda - 4 - c \right)$ where $c = \min\{c_1, c_2\}$ and $C = \max\{c_1, c_2\}$,

Concentración para dos especies con termino fuente lineal

Consideremos el sistema con término de degradación (o mortalidad, o fuente) lineal:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 = \Delta \rho_1 - \alpha_1 \nabla \cdot (\rho_1 \nabla v) - c_1 \rho_1; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \partial_t \rho_2 = \Delta \rho_2 - \alpha_2 \nabla \cdot (\rho_2 \nabla v) - c_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ -\Delta v = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_1 \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_2 \cdot \overrightarrow{\eta} = 0; & (x,t) \in \partial B((0,0),1) \times (0,T) \\ \rho_1(x,0) = \rho_{01}(x), \ \rho_2(x,0) = \rho_{02}(x); & x \in B((0,0),1). \end{cases} \tag{6}$$

Si $\Lambda = \frac{(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})^2}{8\pi(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})}$, tenemos concentración en cualquier caso:

1. $\Lambda > 1$ and $\frac{2c}{C} - 4 \leq \Lambda^{\frac{c}{2C-c}} \left(\frac{2c}{C} \Lambda - 4 - c \right)$ where $c = \min\{c_1, c_2\}$ and $C = \max\{c_1, c_2\}$,
2. $\alpha_1^2 m_{1,0} > 8\pi$,

Concentración para dos especies con termino fuente lineal

Consideremos el sistema con término de degradación (o mortalidad, o fuente) lineal:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 = \Delta \rho_1 - \alpha_1 \nabla \cdot (\rho_1 \nabla v) - c_1 \rho_1; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \partial_t \rho_2 = \Delta \rho_2 - \alpha_2 \nabla \cdot (\rho_2 \nabla v) - c_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ -\Delta v = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_1 \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_2 \cdot \overrightarrow{\eta} = 0; & (x,t) \in \partial B((0,0),1) \times (0,T) \\ \rho_1(x,0) = \rho_{01}(x), \ \rho_2(x,0) = \rho_{02}(x); & x \in B((0,0),1). \end{cases} \tag{6}$$

Si $\Lambda = \frac{(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})^2}{8\pi(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})}$, tenemos concentración en cualquier caso:

1. $\Lambda > 1$ and $\frac{2c}{C} - 4 \leq \Lambda^{\frac{c}{2C-c}} \left(\frac{2c}{C} \Lambda - 4 - c \right)$ where $c = \min\{c_1, c_2\}$ and $C = \max\{c_1, c_2\}$,
2. $\alpha_1^2 m_{1,0} > 8\pi$,
3. $\alpha_2^2 m_{2,0} > 8\pi$,

Concentración para dos especies con termino fuente lineal

Consideremos el sistema con término de degradación (o mortalidad, o fuente) lineal:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 = \Delta \rho_1 - \alpha_1 \nabla \cdot (\rho_1 \nabla v) - c_1 \rho_1; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \partial_t \rho_2 = \Delta \rho_2 - \alpha_2 \nabla \cdot (\rho_2 \nabla v) - c_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ -\Delta v = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_1 \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_2 \cdot \overrightarrow{\eta} = 0; & (x,t) \in \partial B((0,0),1) \times (0,T) \\ \rho_1(x,0) = \rho_{01}(x), \ \rho_2(x,0) = \rho_{02}(x); & x \in B((0,0),1). \end{cases} \tag{6}$$

Si $\Lambda = \frac{(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})^2}{8\pi(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})}$, tenemos concentración en cualquier caso:

1. $\Lambda > 1$ and $\frac{2c}{C} - 4 \leq \Lambda^{\frac{c}{2C-c}} \left(\frac{2c}{C} \Lambda - 4 - c \right)$ where $c = \min\{c_1, c_2\}$ and $C = \max\{c_1, c_2\}$,
2. $\alpha_1^2 m_{1,0} > 8\pi$,
3. $\alpha_2^2 m_{2,0} > 8\pi$,
4. $\Lambda > 1$, $\alpha_1^2 m_{1,0} \leq 8\pi$, and $\alpha_2 > 0$ is large enough,

Concentración para dos especies con termino fuente lineal

Consideremos el sistema con término de degradación (o mortalidad, o fuente) lineal:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 = \Delta \rho_1 - \alpha_1 \nabla \cdot (\rho_1 \nabla v) - c_1 \rho_1; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \partial_t \rho_2 = \Delta \rho_2 - \alpha_2 \nabla \cdot (\rho_2 \nabla v) - c_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ -\Delta v = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2; & (x,t) \in B((0,0),1) \times (0,T) \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_1 \cdot \overrightarrow{\eta} = \nabla \rho_2 \cdot \overrightarrow{\eta} = 0; & (x,t) \in \partial B((0,0),1) \times (0,T) \\ \rho_1(x,0) = \rho_{01}(x), \ \rho_2(x,0) = \rho_{02}(x); & x \in B((0,0),1). \end{cases} \tag{6}$$

Si $\Lambda = \frac{(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})^2}{8\pi(\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{02})}$, tenemos concentración en cualquier caso:

1. $\Lambda > 1$ and $\frac{2c}{C} - 4 \leq \Lambda^{\frac{c}{2C-c}} \left(\frac{2c}{C} \Lambda - 4 - c \right)$ where $c = \min\{c_1, c_2\}$ and $C = \max\{c_1, c_2\}$,
2. $\alpha_1^2 m_{1,0} > 8\pi$,
3. $\alpha_2^2 m_{2,0} > 8\pi$,
4. $\Lambda > 1$, $\alpha_1^2 m_{1,0} \leq 8\pi$, and $\alpha_2 > 0$ is large enough,
5. $\Lambda > 1$, $\alpha_2^2 m_{2,0} \leq 8\pi$, and $\alpha_1 > 0$ is large enough.

Concentración para dos especies con termino fuente lineal

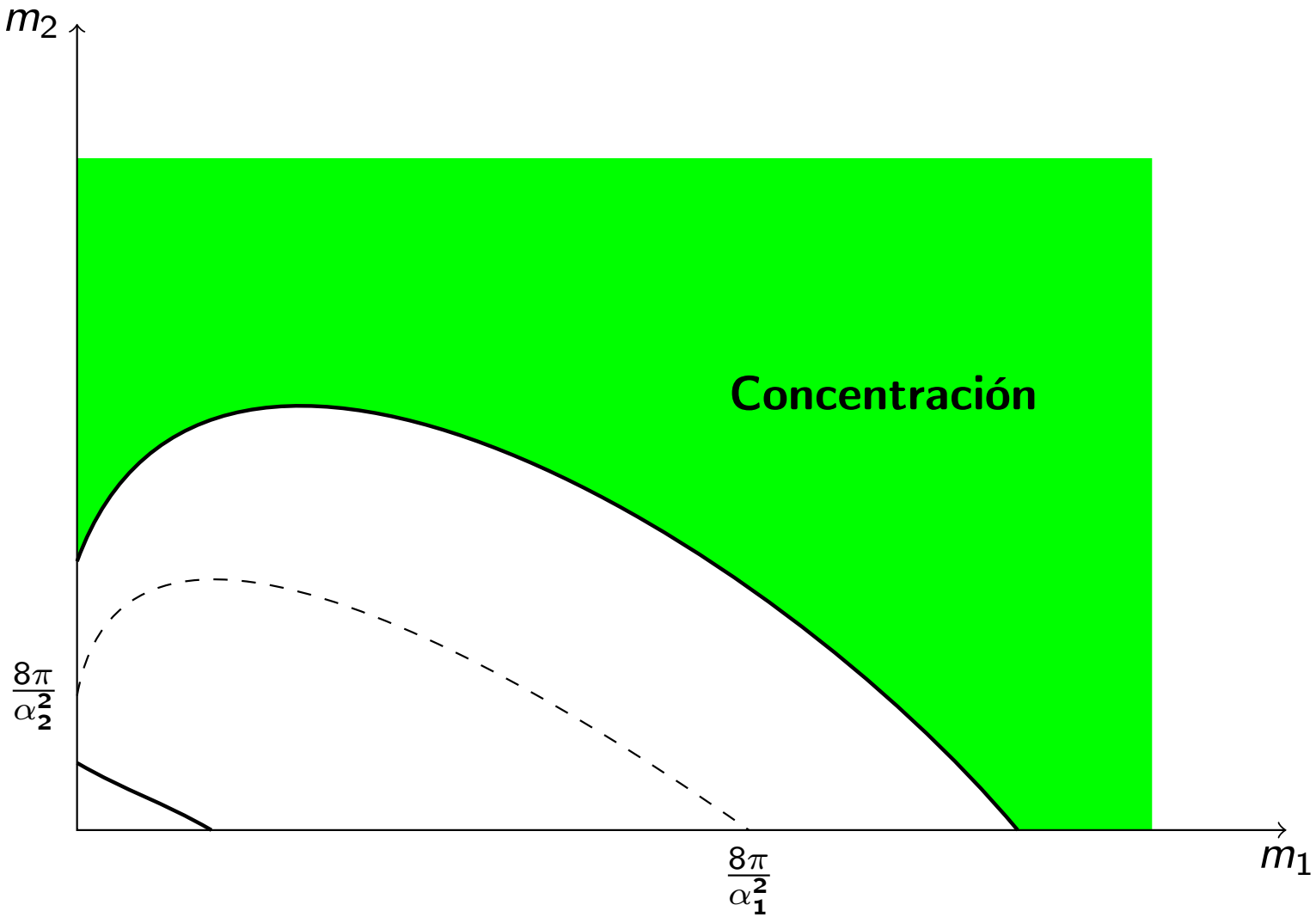


Figure: Dashed curve correspond to $\Lambda = 1$ and continue curve correspond to $\frac{2c}{C} - 4 = \Lambda^{\frac{c}{2C-c}} \left(\frac{2c}{C}\Lambda - 4 - c\right)$

Referencias bibliográficas

1. Blanchet, Adrien, Eric A. Carlen, and José A. Carrillo. Functional inequalities, thick tails and asymptotics for the critical mass Patlak–Keller–Segel model. Journal of Functional Analysis 262.5 (2012): 2142-2230.
2. Blanchet, Adrien, José A. Carrillo, and Nader Masmoudi. Infinite time aggregation for the critical Patlak-Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences 61.10 (2008): 1449-1481.
3. Childress, Stephen, and Jerome K. Percus. "Nonlinear aspects of chemotaxis." Mathematical Biosciences 56.3-4 (1981): 217-237.
4. C. Conca, E. Espejo, and K. Vilches, Remarks on the blowup and global existence for a two species chemotactic Keller–Segel system in $\mathbb{R}^2$, European Journal of Applied Mathematics 22.6 (2011): 553-580.
5. Dolbeault, Jean, and Benoît Perthame. Optimal critical mass in the two dimensional Keller–Segel model in $\mathbb{R}^2$. Comptes Rendus Mathematique 339.9 (2004): 611-616.

6. Espejo, Elio, Karina Vilches, and Carlos Conca. "Sharp condition for blow-up and global existence in a two species chemotactic Keller–Segel system in 2." European Journal of Applied Mathematics 24.2 (2013): 297-313.

7. E. Espejo, A. Stevens, and J. JL. Velázquez, Simultaneous finite time blow-up in a two-species model for chemotaxis, Analysis International mathematical journal of analysis and its applications 29.3 (2009): 317-338.

8. Horstmann, Dirk, and Guofang Wang. Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions. European Journal of Applied Mathematics 12.2 (2001): 159-177.

9. D. Horstmann, "Generalizing the Keller–Segel model: Lyapunov functionals, steady state analysis, and blow-up results for multi-species chemotaxis models in the presence of attraction and repulsion between competitive interacting species," Journal of nonlinear science 21.2 (2011): 231-270.

11. W. Jäger, and S. Luckhaus. “On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis,” Transactions of the american mathematical society 329.2 (1992): 819-824.

12. Wolansky, Gershon. Multi-components chemotactic system in the absence of conflicts. European Journal of Applied Mathematics 13.6 (2002): 641-661.

Gracias por su atención