Introducción al Caos en Física

Raúl Arotaipe Ala

Supervisor: **Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera**

Instituto de Física "Ing. Luis Rivera Terrazas"
Facultad de Física y Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)

VII Encuentro de Egresados de la Escuela Profesional de Física-UNSA **10 de Noviembre del 2022**

Plan

1. Introducción
2. Caos en mecánica clásica
3. Caos en mecánica cuántica
4. Ensambles $\beta-$Hermite

Introducción

- ¿Qué es el caos?
  - Del lat. chaos, y éste del gr. $\chi\alpha O\zeta$ cháos; própiamente 'abertura', 'agujero'.
  - m. Estado originario y confuso de la materia que se supone anterior a la ordenación del universo.
  - m. Confusión y desorden.
  - m. En física y matemática, comportamiento aparententemente errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos deterministas con gran sensibilidad a las condiciones iniciales.
- Real Academia Española ©todos los derechos reservados.

Caos en mecánica clásica

Sistema integrable y no integrable.

- Sistema integrable:
  - El número de constantes de movimiento [4].
  - Sistema periódico.
  - Cumplen el teorema de integrabilidad de Liouville [1].
- Sistema no integrable:
  - Ecuaciones dinámicas no lineales [7].

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + \sin(x) = F\cos(\omega t) \tag{1}$$

Contexto de los billares clásicos.

Modelos paradigmáticos.

Exhiben características de movimientos regulares e irregulares en mecánica clásica.

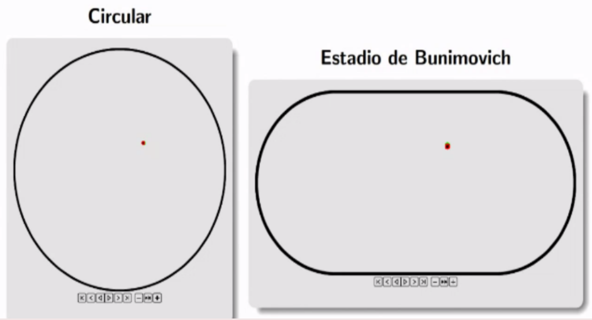

Figura 1: De acuerdo a la configuración pueden exhibir una dinámica regular e irregular, respectivamente.

Contexto de los billares clásicos.

Modelos paradigmáticos.

La evolución temporal muestra características de dinámica diferentes.

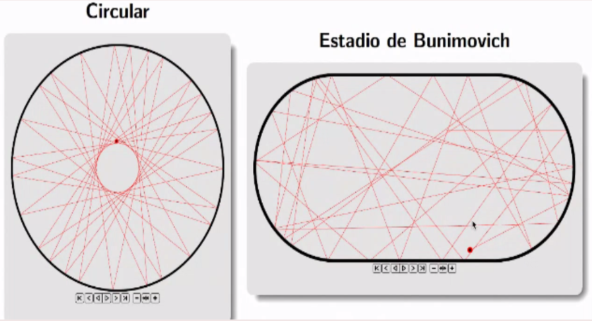

Figura 2: Predecible y impredecible con el tiempo.

Contexto de los billares clásicos.

Modelos paradigmáticos.

Fuerte dependencia en las condiciones iniciales, efecto mariposa.

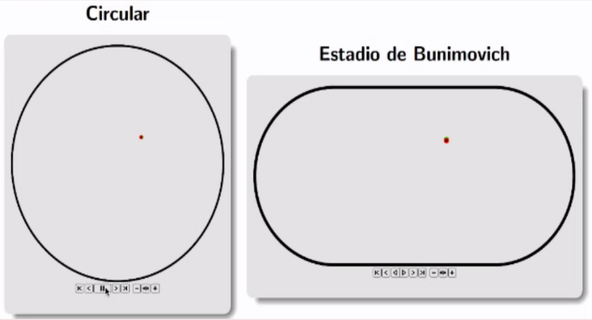

Figura 3: Arreglo bidimensional con estructura circular y estadio de Bunimovish.

Contexto de los billares clásicos.

Modelos paradigmáticos.

Dinámica

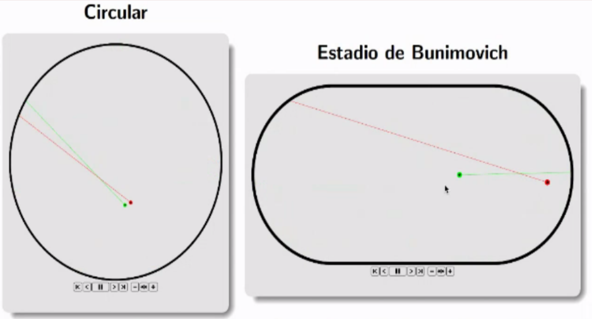

Figura 4: Dependencia de las condiciones iniciales y separación entre las dos partículas.

Contexto de los billares clásicos.

Modelos paradigmáticos.

Sistema descrito por las ecuaciones de Newton.

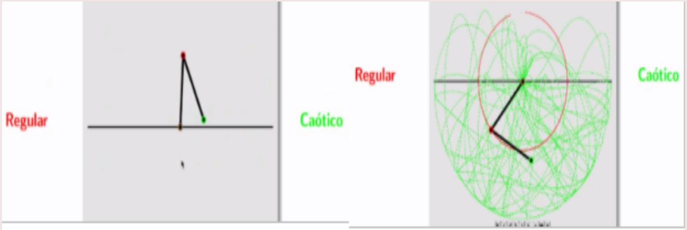

Figura 5: Diagrama del péndulo doble.

Surgimiento del caos clásico.

Fundador del caos clásico.

Figura 6: B. Chirikov (1928-2008).

- B. Chirikov propuso criterios para el surgimiento del caos clásico.
- Criterios aplicado a resultados experimentales.
- Demostró que la dinámica del cometa Halley es caótica [12].

Caos en Física Clásica.

Surgimiento del caos clásico.

Método analítico para determinar las condiciones para la aparición de caos.

Figura 7: Ilustración de los 10 mandamientos de B. Chirikov [8].

- La teoría del caos desarrollada por B. Chirikov tiene bastante insidencia en aplicaciones.

Caos en Física Clásica.

Surgimiento del caos clásico.

Figura 8: Félix Izraelev, IFUAP-BUAP.

- Fue estudiante bajo supervisión de B. Shirikov.
- Ganador de la medalla Marcos Moshinsky en 2017.
- Es uno de los científicos más destacados de la BUAP a nivel nacional e internacional.

Caos en el contexto de la mecánica cuántica.

Caos en mecánica cuántica.

- Dependencia en las condiciones iniciales.
- Problema para el principio de correspondencia de Borh.
- Definición alternativa en términos de 'energías'.
- Caología cuantica: Estudio de las propiedades de un sistema cuántico cuya versión clásica es caótica.

Teoría de matrices aleatórias (RMT).

Espectros energéticos en Física Nuclear

- E. Wigner introdujo la idea de las matrices aleatórias (1951).
- Las propiedades estadísticas podían ser generados por matrices aleatórias [6].

Figura 9: Eugene P. Wigner (1902-1995)

Teoría de matrices aleatórias (RMT).

Estudio de espectros energéticos.

- Matrices llenas de números aleatorias.
- Tienen simetrías del sistema que se quiere representar.
- Sistemas con simetría de invesión temporal.
- En RMT encontramos tres ensables clásicos [6].
  - Ensamble Gausiano Ortogonal (GOE).
  - Ensamble Gausiano Unitario (GUE).
  - Ensamble Gausiano Simpléctico (GSE).
- Dependiendo de las entradas, se asocia un índice un Dyson.
  - $\beta = 1$ para GOE.
  - $\beta = 2$ para GUE.
  - $\beta = 4$ para GSE.

Teoría de Matrices Aleatórias.

Aplicaciones de RMT y la conjetura BGS [6]:

- RMT es aplicado a la física nuclear en los 1960's y los 1970's.
- RMT se desarrolló en sus fundamentos y aplicaciones en los 1980's y 1990's.
- Aplicaciones, tales como en RMT y física mesoscópica, sistemas desordenados.
- Campo del caos cuántico.
- Conjetura de Bohigas-Giannoni-Schmit (BGS) [3].
  - Espectro de sistemas cuánticos caóticos maś generales son descritos por RMT.

Ensambles $\beta-$Hermite

La representación tradicional de acuerdo a A. Edelman y Dimitru en [6]:

$$H_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N(0,2) & \chi_{(n-1)\beta} & 0 & \cdots & 0 \\ \chi_{(n-1)\beta} & N(0,2) & \chi_{(n-2)\beta} & \cdots & 0 \\ 0 & \chi_{(n-2)\beta} & N(0,2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \chi_\beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \chi_\beta & N(0,2) \end{pmatrix}$$

Características estáticas

Densidad de Estados (DoS)

- DoS está definido por [6]:

$$\rho(E) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta(E - E_{\alpha}) \tag{2}$$

- En RMT

$$\rho_{RMT}(E) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - E_{\alpha}^{2}} \tag{3}$$

Características estáticas

Distribución del espaciado entre valores propios adyacentes [9].

- Definido de la siguiente forma:

$$P_{GOE}(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4}s^2} \tag{4}$$

$$P_{GUE}(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-\frac{4}{\pi}s^2} \tag{5}$$

$$P_{GSE}(s) = \frac{2^{18}}{3^6\pi^3} s^4 e^{-\frac{64}{9\pi}s^2} \tag{6}$$

$$s_\alpha = \frac{E_\alpha - E_{\alpha-1}}{\delta E} \tag{7}$$

Características estáticas

Distribución tipo Poisson y Wigner.

- Las distribuciones están asociadas a las correlaciones.

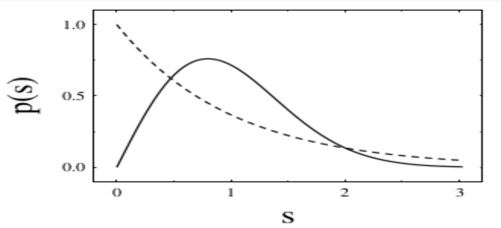

Figura 10: Ley de Poisson (lineas punteadas) y Wigner (sólida) [5].

$$P_P(s) = e^{-s} \tag{8}$$

$$P_W(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4}s^2} \tag{9}$$

Características estáticas

Varianza del número de valores propios.

- Cantidad asociada a correlaciones de largo alcance.

$$\varsigma_{\beta}^{2}(l) = \frac{2}{\beta\pi^2}[log(2\pi l) + \gamma + c_{\beta} + 1] \tag{10}$$

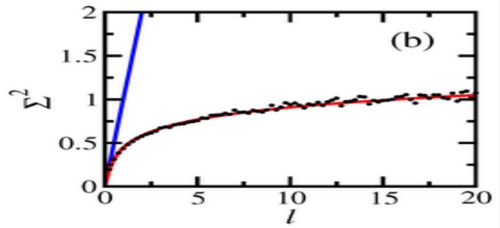

Figura 11: Varianza de número de niveles [10].

Características dinámicas

Factor de Forma Espectral

- Cantidad útil para diagnosticar el espectro del sistema [2].

$$SSF(T,t) = |Z\,(T+it)|^2 = \sum_{\alpha,\gamma} e^{-k_\beta(E_\alpha - E_\gamma) + i(E_\alpha - E_\gamma)t} \tag{11}$$

$$SSF(T=\infty,t) = \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\gamma} e^{i(E_\alpha - E_\gamma)t} \tag{12}$$

Características dinámicas

Factor de Forma Espectral

- Características de sistemas no integrables.

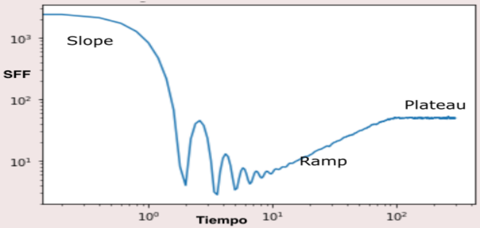

Figura 12: Ejemplo del SFF con $T = \infty$ para el GUE de RMT [13].

RMT y modelos realistas.

Diferencia [11] :

- Enfoque de Wigner fue mediante RTM y GOE, matrices llenas.
- Restringidos por el operador de reversibilidad temporal.
- Diferencia en las interacciones.
- Permite la derivación de expresiones analíticas de observables de interés.

List of References

[1] Vladimir Igorevich Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*. Vol. 60. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] Alexandre Belin et al. «Generalized spectral form factors and the statistics of heavy operators». En: *arXiv preprint arXiv:2111.06373* (2021).

[3] Oriol Bohigas, Marie-Joya Giannoni y Charles Schmit. «Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws». En: *Physical review letters* 52.1 (1984), pág. 1.

[4] Herbert Goldstein, Charles Poole y John Safko. *Classical mechanics*. 2002.

[5] Thomas Guhr. *Random Matrix Theory in Physics*. 2006.

[6] Madan Lal Mehta. *Random matrices*. Elsevier, 2004.

List of References

[7] Miguel Angel Fernández Sanjuán. «Dinámica No Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos: una perspectiva histórica». En: *Rev R Acad Cienc Exact Fís Nat* 109.1–2 (2016), págs. 107-126.

[8] Dima Shepelyansky. «Boris Valerianovich Chirikov». En: *Scholarpedia* 3.10 (2008), pág. 6628.

[9] Hans-Jürgen Stöckmann. *Quantum chaos: an introduction*. 2000.

[10] Eduardo Jonathan Torres-Herrera et al. «Realistic many-body quantum systems vs. full random matrices: Static and dynamical properties». En: *Entropy* 18.10 (2016), pág. 359.

[11] EJ Torres-Herrera, Antonio M García-García y Lea F Santos. «Generic dynamical features of quenched interacting quantum systems: Survival probability, density imbalance, and out-of-time-ordered correlator». En: *Physical Review B* 97.6 (2018), pág. 060303.

List of References

[12] VV Vecheslavov y BV Chirikov. «Chaotic dynamics of Comet Halley». En: *Soviet Astronomy Letters* 14 (1988), pág. 151.

[13] Michael Winer y Brian Swingle. «Hydrodynamic theory of the connected spectral form factor». En: *Physical Review X* 12.2 (2022), pág. 021009.

Thank You So Much!