

Física de partículas elementales y  
mecánica cuántica, en colaboración  
con estudiantes peruanos, en la  
Universidad de Guanajuato,  
México

VII Encuentro de Egresados de la  
Escuela Profesional de Física UNSA-2022

**Marco A. Reyes S.**

Departamento de Física

DCI-CLE-UG

# Agradecimiento

Al Profesor

Rolando Moisés Perca Gonzales

A los organizadores del

VII Encuentro de Egresados de la  
Escuela Profesional de Física UNSA-2022

# Contenido

Introducción

Mecánica Cuántica

Investigaciones previas

Trabajo con Edgar Condori

Física-X de Partículas Elementales

Desarrollo en la DCI

Trabajo con Kevin Hernández

# Objetivos

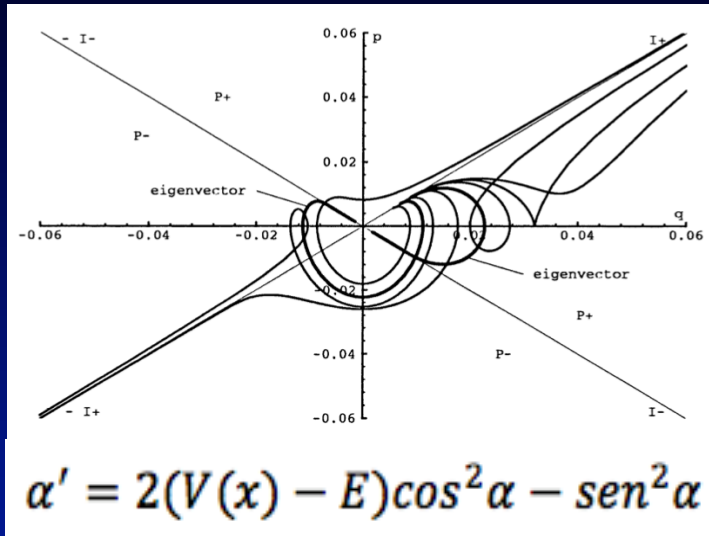
- El posgrado en Física está diseñado para la generación de nuevos investigadores
- Parte esencial es la proyección internacional de nuestros programas: **alumnos y profesores**
- El estudiante desarrolla su investigación con el acompañamiento del asesor
- Varias áreas de investigación:  
**Mecánica cuántica, Partículas, gravitación, cosmología, estadística, física médica, además de otras áreas de ciencias**
- Participación de estudiantes Peruanos en varias áreas

# Temas

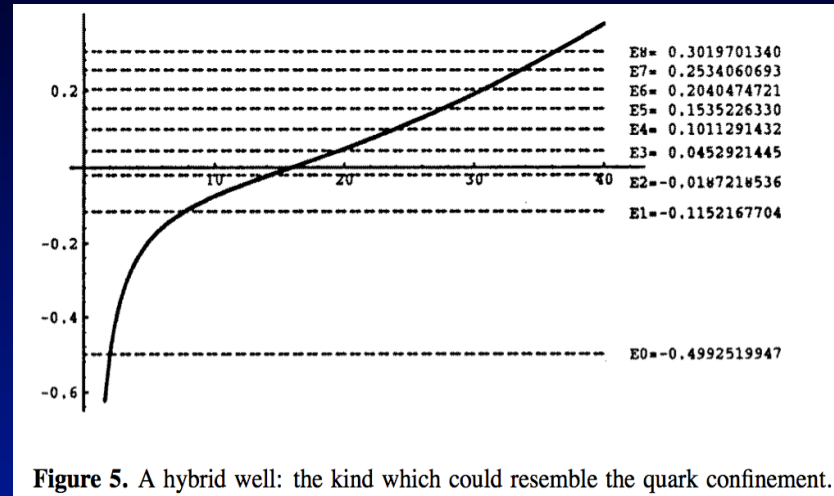
En particular platicaremos sobre investigaciones en:

- Mecánica Cuántica
- Partículas elementales, experimental

# MQ: desde Riccati ...



El espacio fase por eigenvalores



Espectro numérico por forma asintótica

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right),$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi},$$

Cosmología estándar FRW +  
campo escalar  $\phi(\mathbf{t})$

Aplicaciones en:

MQ 1D

Gravitación

Cosmología

S Sturm-Liouville

# Hasta SUperSYmmetry

SUSY hace su aparición en física de partículas: Witten nuevas partículas, DM, DE, cosmología,...

## ATLAS strengthens its search for supersymmetry

29 March 2022 | By ATLAS Collaboration

Where is all the new physics? In the decade since the [Higgs boson](#)'s discovery, there have been no hints of new particles in LHC data. Could they be sneaking past the standard searches? ATLAS researchers are developing innovative ways to search for particles, improving their search programme to ensure they have the best chance of discovering new physics in Run 3 of the LHC.

At the recent Moriond conferences, the ATLAS Collaboration presented several new results related to searches for weakly-interacting supersymmetry. [Supersymmetry](#) (SUSY) is a promising theory that gives each elementary particle a “superpartner”, thus solving several problems in the current Standard Model and even providing a possible candidate for [dark matter](#). ATLAS' new searches target *charginos* and *neutralinos* – the heavy superpartners of the force-carrying particles in the Standard Model – and *sleptons* – the superpartners of Standard Model leptons. If produced at the LHC these particles would each decay into Standard Model particles and the lightest neutralino, which is taken to be the dark matter candidate.

### Searching for charginos and sleptons in unexplored regions

ATLAS' [newest search](#) for charginos and sleptons studies a mass region [previously unexplored](#) due to challenging background conditions. Researchers designed dedicated searches for each SUSY particle, looking at their decays into two leptons (electrons or muons) and missing energy (attributed to a neutralino). They focused on signals where the mass difference between the produced SUSY particles and the neutralino would make them very similar to the Standard Model production of two W bosons (WW production).

# SUSY QM

Para ver su aparición en MQ, consideremos al OAS

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + x \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2} \frac{d}{dx} e^{x^2/2},$$
$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dx} + x \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{x^2/2} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2}$$

$$\left. \begin{aligned} a^*a &= H - \frac{1}{2} \\ aa^* &= H + \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [a, a^*] = 1$$

Usando estos operadores se puede construir todo el espectro del OAS

$$\psi_n(x) = c_n H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad E_n = n + \frac{1}{2}$$



# SUSY para el OAS

En 1984, Bogdan Mielnik se pregunta:  
¿Son los operadores  $a$  y  $a^*$  únicos?

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + \beta(x) \right), \quad b^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dx} + \beta(x) \right)$$

$$bb^* = aa^* = H + \frac{1}{2}$$

$$\beta' + \beta^2 = 1 + x^2$$

$$\beta(x) = x + \frac{e^{-x^2}}{\gamma + \int_0^x e^{-x'^2} dx'}$$

¿Qué pasa ahora con el orden inverso?

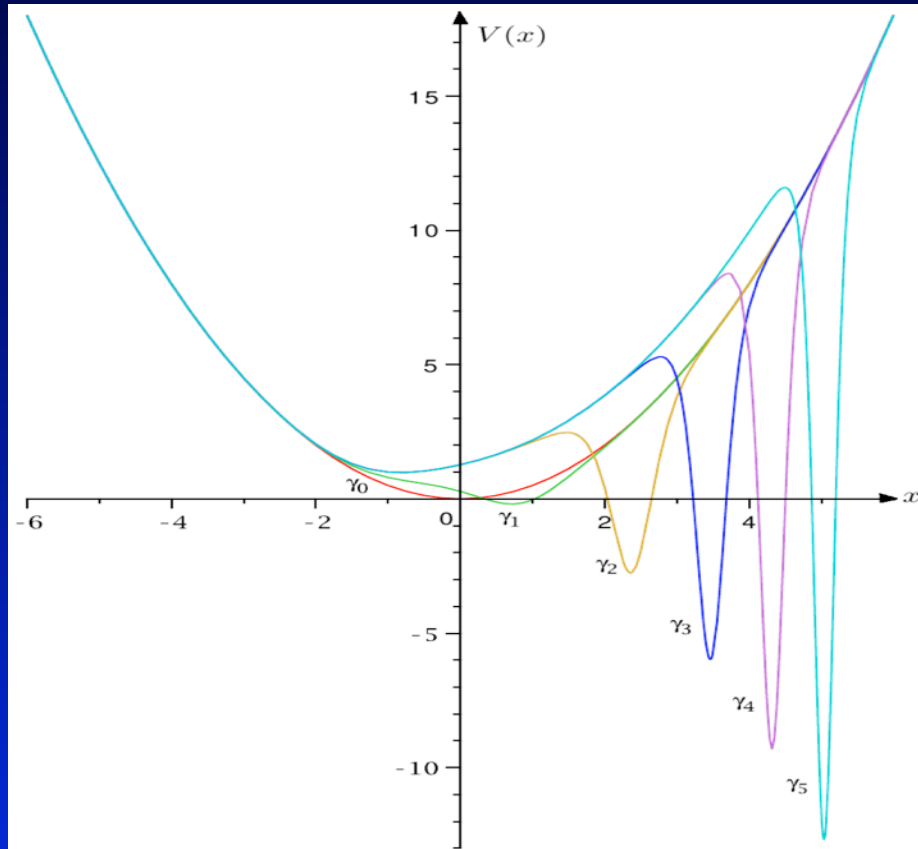
$$b^*b = \tilde{H} - \frac{1}{2}$$

$$\tilde{\psi}_{n+1} = b^* \psi_n$$

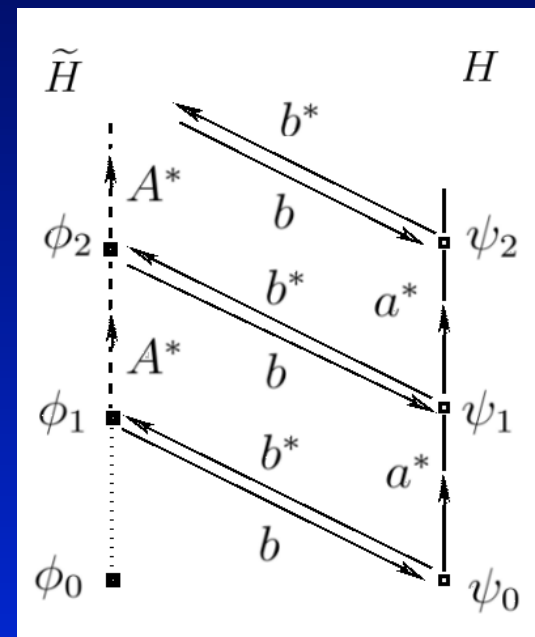
$$\tilde{H} = H - \phi'_\gamma(x), \quad \tilde{V}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\gamma e^{-x^2}}{1 + \gamma \int_0^x e^{-x'^2} dx'} \right]$$

# SUSY QM para el OAS

Nuevos potenciales, mismo espectro



Los ops de creac/aniq son de 3er orden



Método aplicado a todos los problemas 1D  
incluyendo las ecs de Dirac y KG

# Dos factorizaciones

Con Ranferi Gutiérrez\* propusimos una factorización alternativa a la de Mielnik para el OAS

$$B^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\alpha(x) \frac{d}{dx} + \beta(x) \right)$$

$$B^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha^{-1}(x) \frac{d}{dx} + \beta(x) \right)$$

$$B^- B^+ = H + \frac{1}{2}.$$

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta e^{-x^2}}},$$

$$\beta(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + \delta e^{-x^2}}},$$

El producto inverso  $B^+ B^-$  ya no genera un Hamiltoniano

-> No se le prestó atención!!

$$\mathcal{L} H_n^\delta(x) + E_n \omega(x) H_n^\delta(x) = 0,$$

$$\mathcal{L} = \left( 1 + \delta e^{-x^2} \right) \frac{d^2}{dx^2} - 2\delta x e^{-x^2} \frac{d}{dx} - \left[ \frac{x^2}{1 + \delta e^{-x^2}} + \delta e^{-x^2} \right]$$

$$H_n^\delta(x) = \left( \frac{1}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \delta + e^{x^2} \right)^{-1/2} H_n(x)$$

# Casos $\delta=0$ y $\delta \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L} = \left(1 + \delta e^{-x^2}\right) \frac{d^2}{dx^2} - 2\delta x e^{-x^2} \frac{d}{dx} - \left[\frac{x^2}{1 + \delta e^{-x^2}} + \delta e^{-x^2}\right] \longrightarrow H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2$$

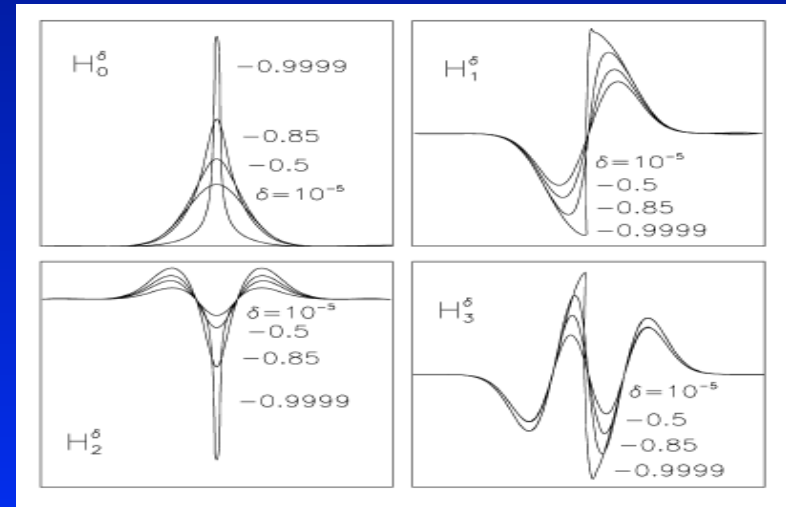
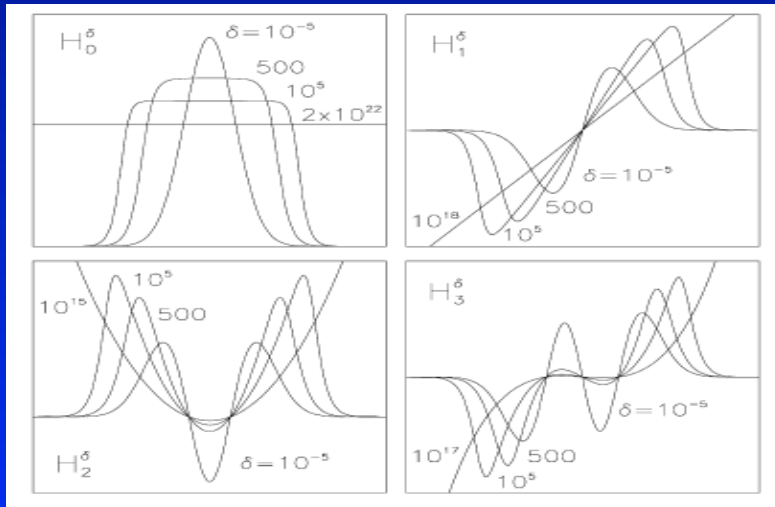
Para  $\delta$  grande

$$\mathcal{L}_0 H_n^\delta(x) \rightarrow \delta e^{-x^2} \left[ \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} - 1 \right] \delta^{-1/2} c_n H_n(x),$$

$$E_n \omega_\delta(x) H_n^\delta(x) \rightarrow 2\delta e^{-x^2} E_n \delta^{-1/2} c_n H_n(x) = \delta e^{-x^2} (2n + 1) \delta^{-1/2} c_n H_n(x)$$

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

... se obtiene la ec. De Hermite!



# Solución que incluye SUSY

Rafael Arcos Olalla realizó la solución general que ahora incluye SUSY

$$B^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\alpha(x) \frac{d}{dx} + \beta(x) \right)$$

$$B^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha^{-1}(x) \frac{d}{dx} + \beta(x) \right)$$

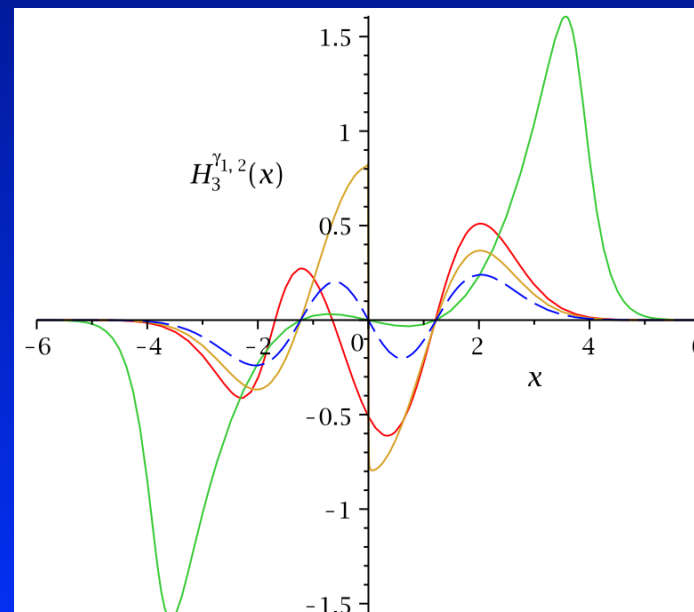
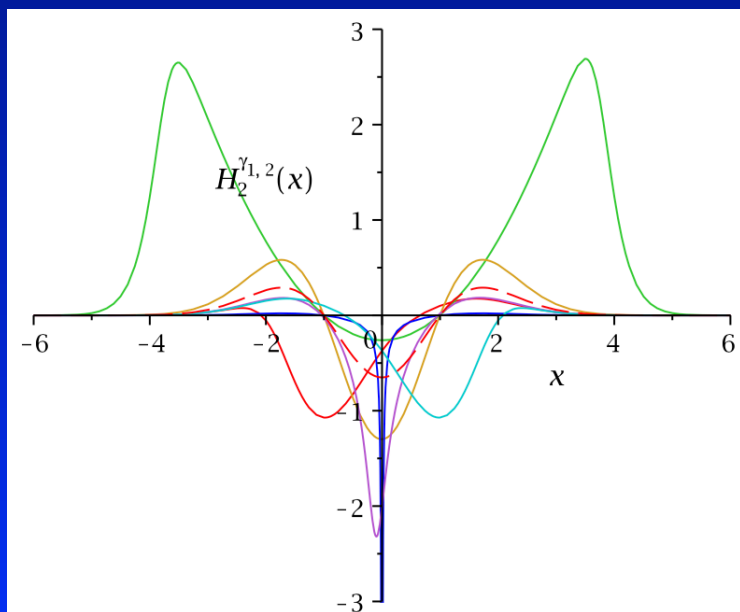
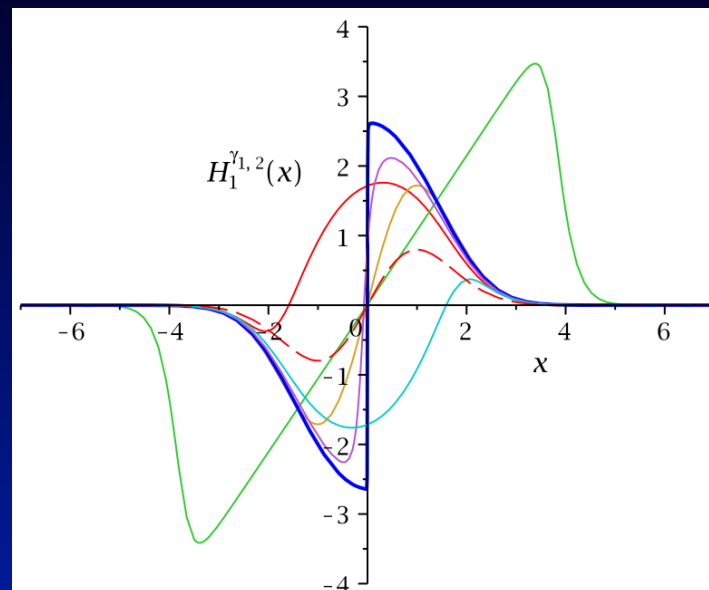
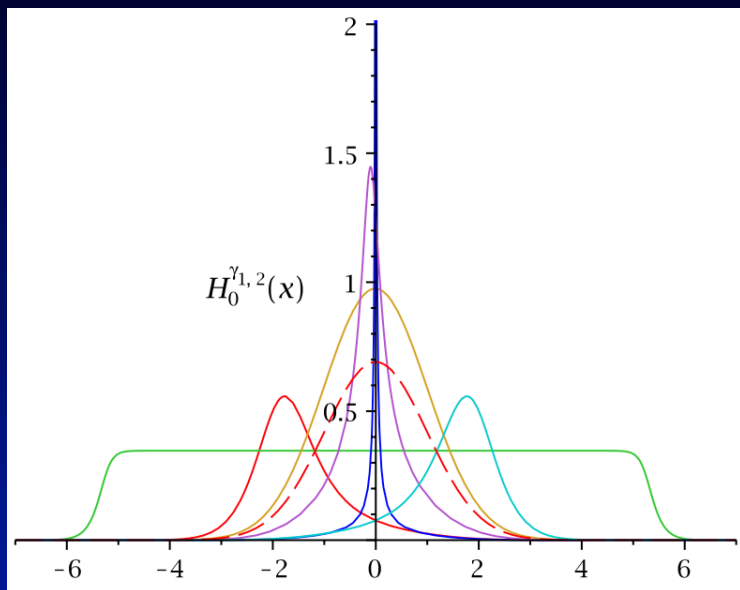
$$\mathcal{L}_{\gamma_{1,2}} H_n^{\gamma_{1,2}}(x) + E_n \omega_{\gamma_{1,2}}(x) H_n^{\gamma_{1,2}}(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\gamma_{1,2}} = & \left[ 1 - \frac{\gamma_2 e^{-x^2}}{(\gamma_1 + E(x))^2} \right] \frac{d^2}{dx^2} \\ & + \frac{2\gamma_2 e^{-x^2}}{(\gamma_1 + E(x))^2} \left( x + \frac{e^{-x^2}}{\gamma_1 + E(x)} \right) \frac{d}{dx} \\ & - \left[ 2 - \frac{\gamma_2 e^{-x^2}}{(\gamma_1 + E(x))^2} \right] \frac{[x(\gamma_1 + E(x)) + e^{-x^2}]^2}{(\gamma_1 + E(x))^2 - \gamma_2 e^{-x^2}} \\ & + \frac{\gamma_2 e^{-x^2}}{(\gamma_1 + E(x))^2} + x^2. \end{aligned}$$

Esta ec. de Sturm–Liouville se reduce a la ec. del OAS–MQ cuando  $\gamma_2=0$  y a la ec. de Hermite cuando  $\gamma_2/\gamma_1^2 \rightarrow \infty$

*Rafael Arcos-Olalla, Marco A. Reyes y Haret C. Rosu, Phys. Lett. A 376 (2012) 2860-2865*

# Funciones generalizadas de Hermite



# Solución exacta o cuasi-exacta?

En general, se tienen tres tipos de soluciones:

- **Exactas**

en donde se conoce todo el espectro

- **Numéricas**

no se puede obtener espectro analítico

- **Cuasi-exacta**

solo parte del espectro se puede conocer

# Trabajos con Edgar Condori

Con Edgar hemos realizado análisis de ecuaciones de Schrödinger más allá de SUSY

- **Ecuación radial del AH**

o que solo tienen soluciones cuasi-exactas

- **Ecuación de Razavi**

- **Potenciales hiperbólicos**



# Factorización alternativa del AH

Factorizamos al Hamiltoniano del AH con nuevos operadores

$$H_\ell R(r) = \frac{1}{r} \left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2}{r} \right] r R(r) = \lambda_n R(r)$$

$$B_\ell^+ = \frac{1}{r} \left( -\alpha_\ell \frac{d}{dr} + \beta_\ell \right) r, \quad B_\ell^- = \frac{1}{r} \left( \alpha_\ell^{-1} \frac{d}{dr} + \beta_\ell \right) r$$

$$a_\ell^+ a_\ell^- = H_\ell + \frac{1}{\ell^2}$$

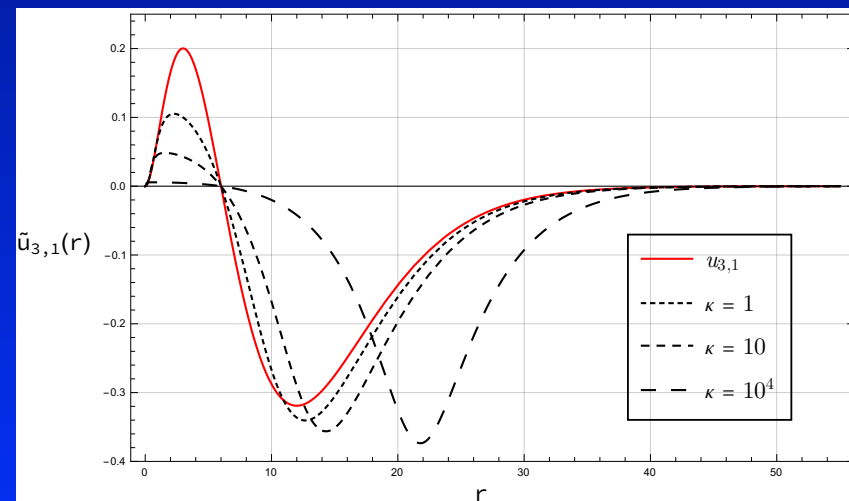
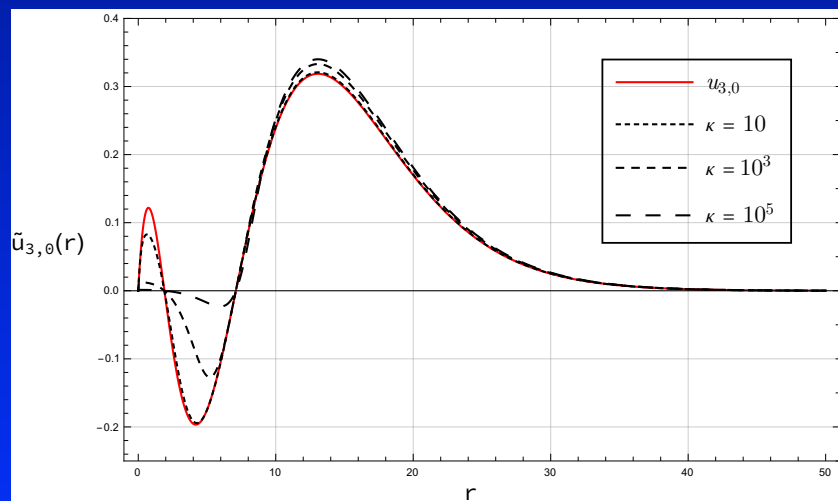
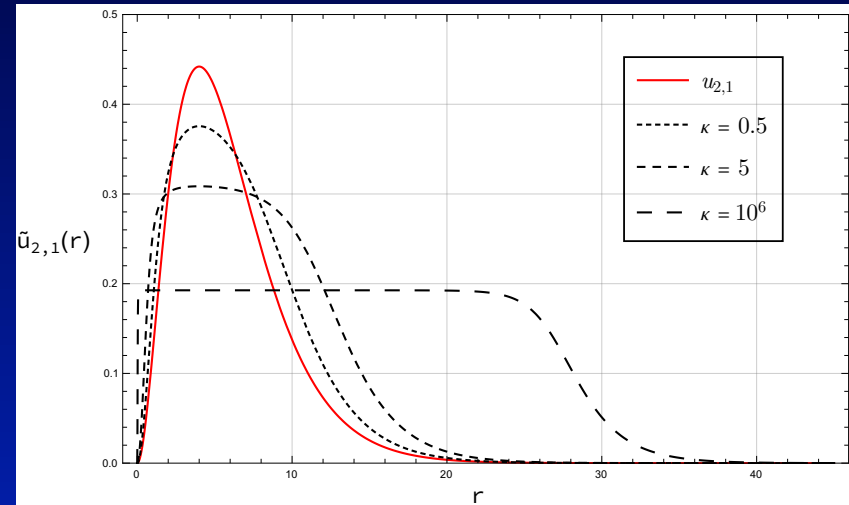
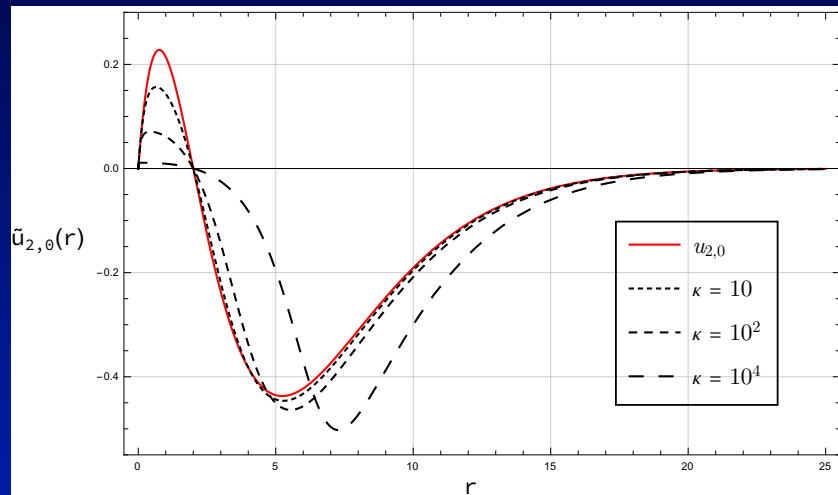
$$B_\ell^+ B_\ell^- = H_\ell + \frac{1}{\ell^2}$$

$$\mathcal{L}_{\ell-1} u_{n,\ell-1} + \lambda_n \alpha_\ell^2 u_{n,\ell-1} = 0$$

$$u_{n,\ell-1} = r \tilde{R}_{n,\ell-1}$$

# Eigenfunciones de SL

El orden inverso de factorización produce nuevos operadores de SL con el mismo espectro radial



# Potenciales hiperbólicos: QES

Algunos potenciales hiperbólicos o trigonométricos resultan ser cuasi-exactamente resolubles

Se trataron dos problemas diferentes:

- Un potencial tipo Razavy
- Un potencial hiperbólico más general

Bajo tres enfoques diferentes:

- Solución algebraica
- Ecuación de Heun
- Álgebras de Lie

# Potencial tipo Razavy

El problema es QES, y la intensidad del potencial depende del orden polinomial

$$V(x) = V_0 (\sinh^4(x) - \zeta \sinh^2(x))$$

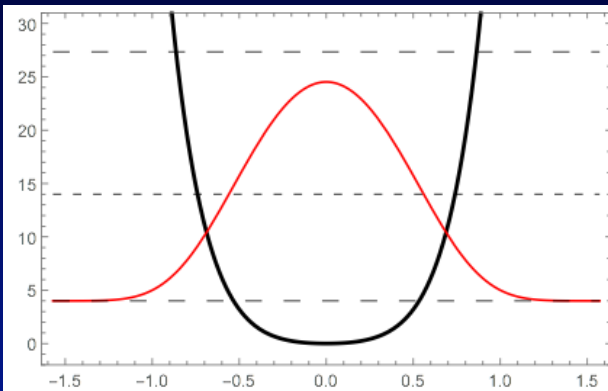
$$V_0 = \frac{4(2N+1)^2}{(\zeta+1)^2}$$

$$V_0 = \frac{4(2N+2)^2}{(\zeta+1)^2}$$

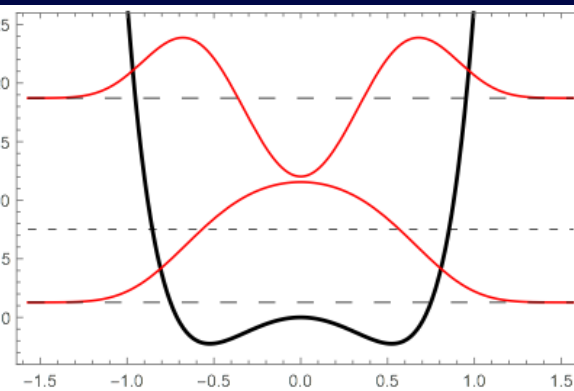
	<i>TF1</i>			<i>TF2</i>		
	<i>N</i> = 0	<i>N</i> = 1	<i>N</i> = 2	<i>N</i> = 0	<i>N</i> = 1	<i>N</i> = 2
$E_0$	<b>5.000</b>	<b>2.802</b>	<b>-0.813</b>	4.000	1.282	-4.000
$E_1$	16.640	11.000	3.338	<b>14.000</b>	<b>7.510</b>	<b>-1.787</b>
$E_2$	31.164	<b>23.198</b>	<b>13.964</b>	27.341	18.718	9.194
$E_3$	47.999	37.987	26.662	43.150	<b>32.490</b>	<b>20.529</b>
$E_4$	66.863	54.999	<b>41.849</b>	61.087	48.587	34.806
$E_5$	87.572	73.994	59.151	80.937	66.733	<b>51.258</b>
$E_6$	109.994	94.806	78.370	102.552	86.747	69.683
$E_7$	134.027	117.312	99.363	125.820	108.494	89.923
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

**Table 2.1:** Exact (bold type) and numerical eigenvalues for the hyperbolic potential (2.1), for even *TF1* and odd *TF2* eigenfunctions, with *N* = 0, 1, and 2 and  $\gamma = 5/2$ .

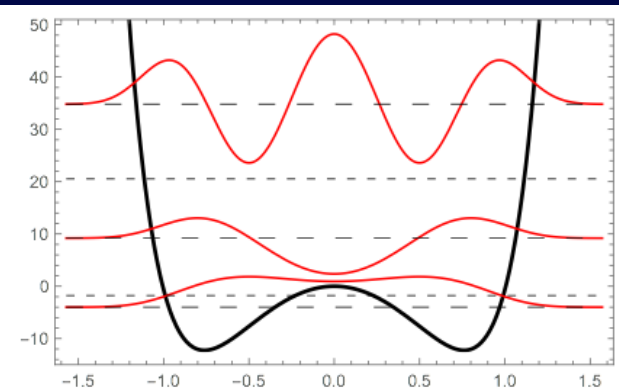
# Eigenfunciones: Razavy



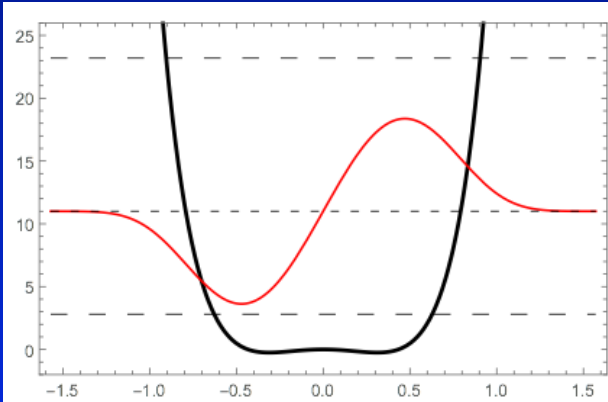
(a)  $N = 0$



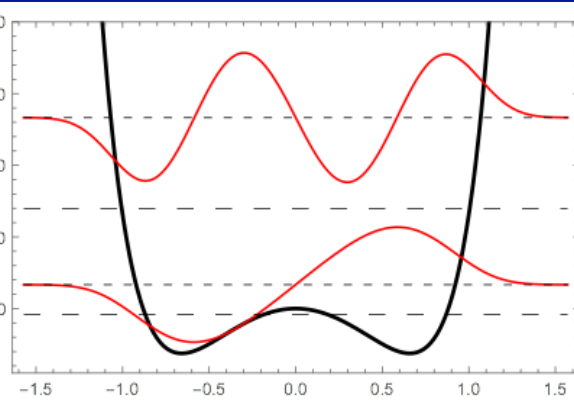
(b)  $N = 1$



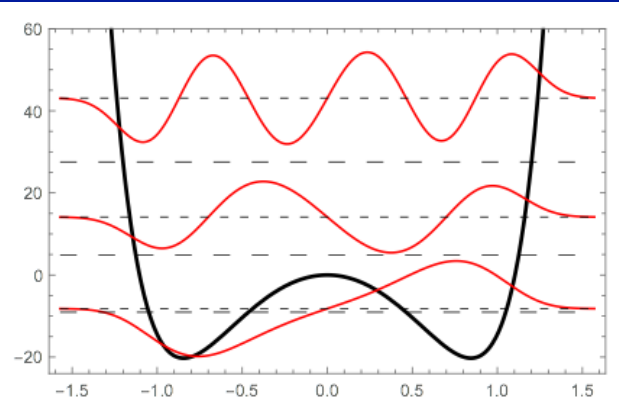
(c)  $N = 2$



(a)  $N = 0$



(b)  $N = 1$



(c)  $N = 2$

# Artículos de investigación



Contents lists available at [ScienceDirect](#)

## Annals of Physics

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/aop](http://www.elsevier.com/locate/aop)



## Quasi-exactly solvable hyperbolic potential and its anti-isospectral counterpart



E. Condori-Pozo<sup>a</sup>, M.A. Reyes<sup>a</sup>, H.C. Rosu<sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Física, Universidad de Guanajuato, Apdo. Postal E143 León, Gto., Mexico

<sup>b</sup> Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, Camino a la presa San José 2055, Col. Lomas 4a Sección, 78216 San Luis Potosí, S.L.P., Mexico

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 27 July 2021

Accepted 19 December 2021

Available online 24 December 2021

#### Keywords:

Quasi-exactly solvable problem

Anti-isospectral

Polynomial

Confluent Heun equation

Lie algebra

### ABSTRACT

We solve the eigenvalue spectra for two quasi exactly solvable (QES) Schrödinger problems defined by the potentials  $V(x; \gamma, \eta) = 4\gamma^2 \cosh^4(x) + V_1(\gamma, \eta) \cosh^2(x) + \eta(\eta - 1) \tanh^2(x)$  and  $U(x; \gamma, \eta) = -4\gamma^2 \cos^4(x) - V_1(\gamma, \eta) \cos^2(x) + \eta(\eta - 1) \tan^2(x)$ , found by the anti-isospectral transformation of the former. We use three methods: a direct polynomial expansion, which shows the relation between the expansion order and the shape of the potential function; direct comparison to the confluent Heun equation (CHE), which has been shown to provide only part of the spectrum in different quantum mechanics problems, and the use of Lie algebras, which has been proven to reveal hidden algebraic structures of this kind of spectral problems.

© 2021 Elsevier Inc. All rights reserved.

# Partículas elementales

Originalmente, la DCI se llamó Instituto de Física, dedicado a física experimental de partículas

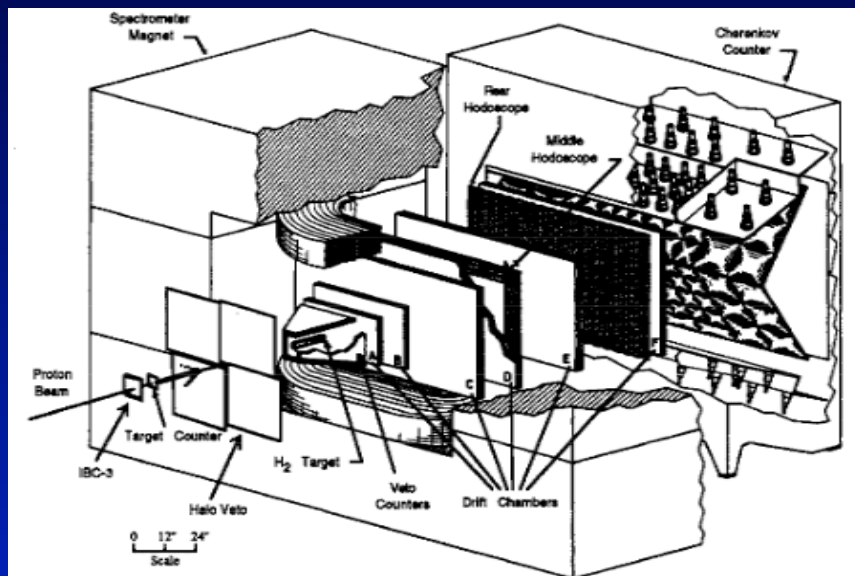
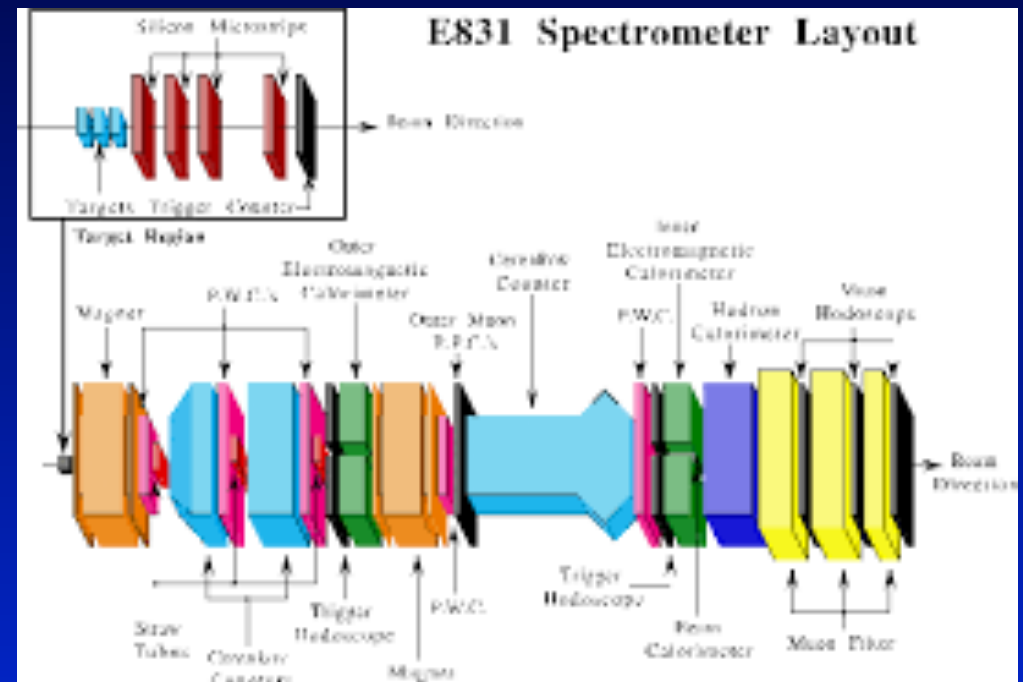


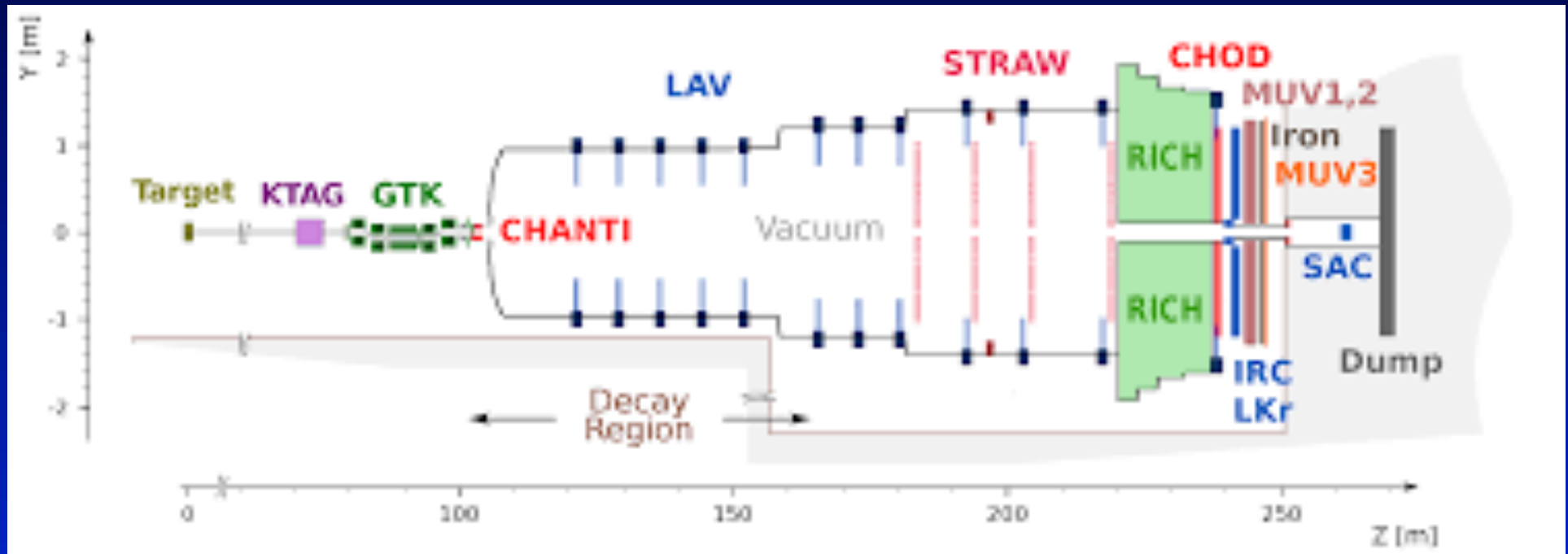
FIGURE 1. E690 Multiparticle Spectrometer.



Se ha trabajado con BNL, Fermilab, CERN, y Jlab, en física de glueballs, híbridos, pentaquarks, charm, neutrinos, y haces de diferentes partículas

# CERN-NA62

Actualmente colaboramos en experimentos de neutrinos y en NA62, que tiene un haz de kaones

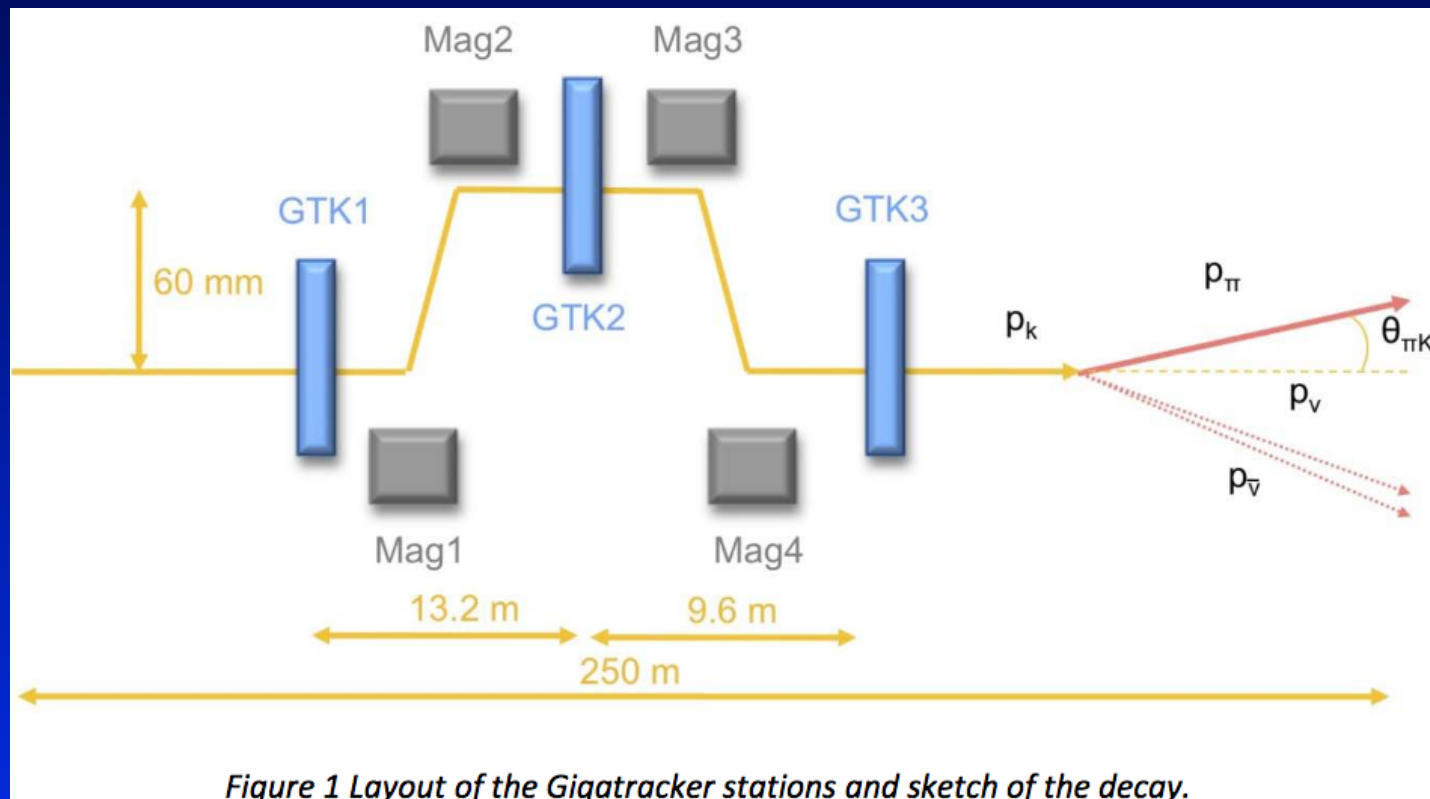


El CERN-NA62 está dedicado a decaimientos raros del  $K^+$ : para poder ver 100 eventos es necesario producir del orden de  $10^{13}$  kaones en el blanco de Be



# NA62: GTK3

Uno de los componentes del espectrómetro, el GTK3, se encuentra al inicio de la sección de decaimiento:  
**propusimos usarlo como blanco fijo**



Debido a que el haz es de  $\pi$ ,  $p$ , o  $K^+$ , esta hipótesis permite estudiar producción hadrónica con diferentes haces

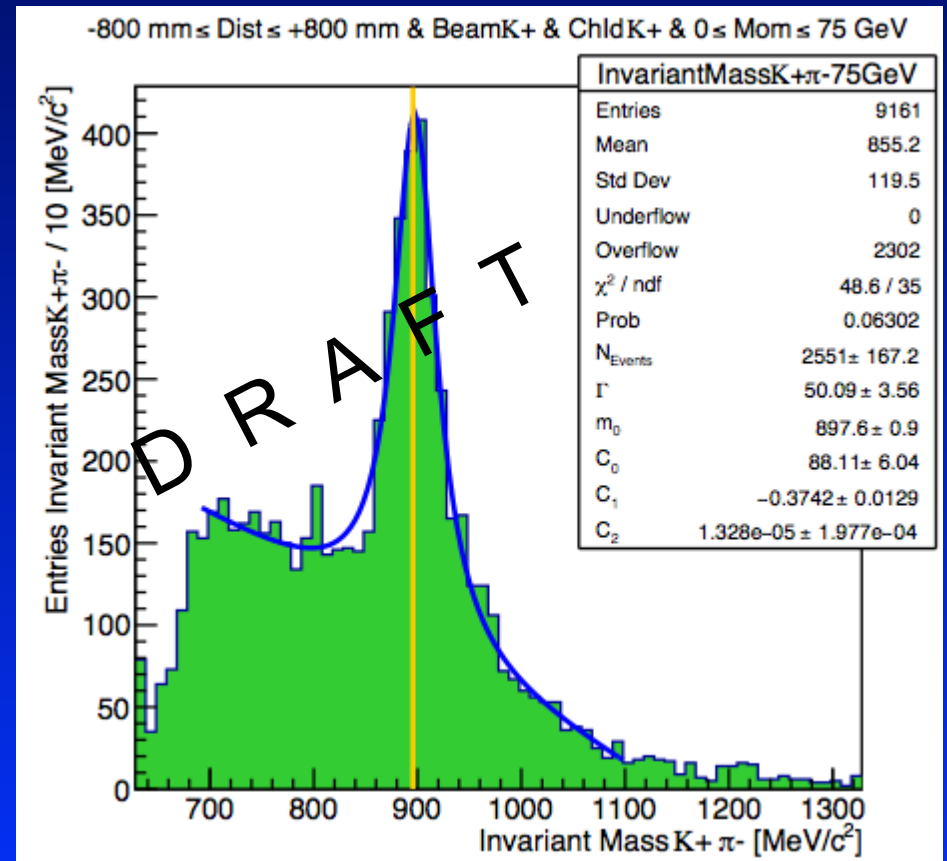
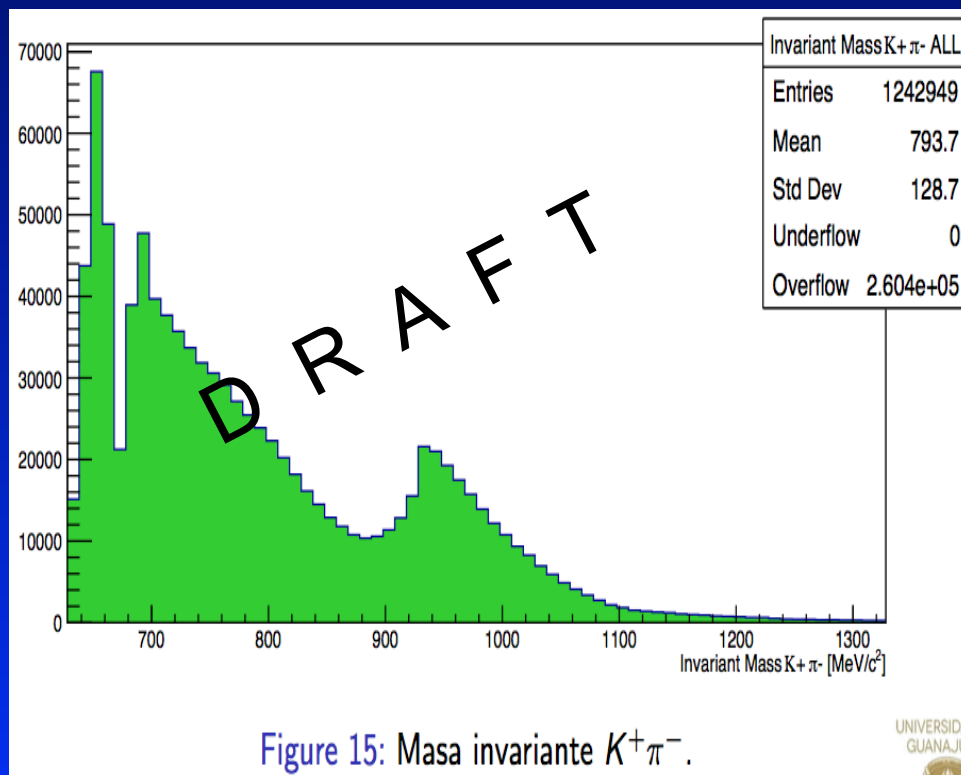
# Trabajo con Kevin Rodríguez

Con Kevin decidimos estudiar la producción de estados excitados de kaones, en particular  $K^{*0}$

<b><math>K^*(892)</math></b>	$I(J^P) = \frac{1}{2}(1^-)$		
$K^*(892)^\pm$ hadroproduced mass	$m = 891.76 \pm 0.25$ MeV		
$K^*(892)^\pm$ in $\tau$ decays mass	$m = 895.5 \pm 0.8$ MeV		
$K^*(892)^0$ mass	$m = 895.55 \pm 0.20$ MeV	(S = 1.7)	
$K^*(892)^\pm$ hadroproduced full width	$\Gamma = 50.3 \pm 0.8$ MeV		
$K^*(892)^\pm$ in $\tau$ decays full width	$\Gamma = 46.2 \pm 1.3$ MeV		
$K^*(892)^0$ full width	$\Gamma = 47.3 \pm 0.5$ MeV	(S = 1.9)	
<b><math>K^*(892)</math> DECAY MODES</b>	Fraction ( $\Gamma_i/\Gamma$ )	Confidence level	$p$ (MeV/c)
$K\pi$	$\sim 100$	%	290
$K^0\gamma$	$(2.46 \pm 0.21) \times 10^{-3}$		307
$K^\pm\gamma$	$(1.00 \pm 0.09) \times 10^{-3}$		309
$K\pi\pi$	$< 7$	$\times 10^{-4}$	95% 223

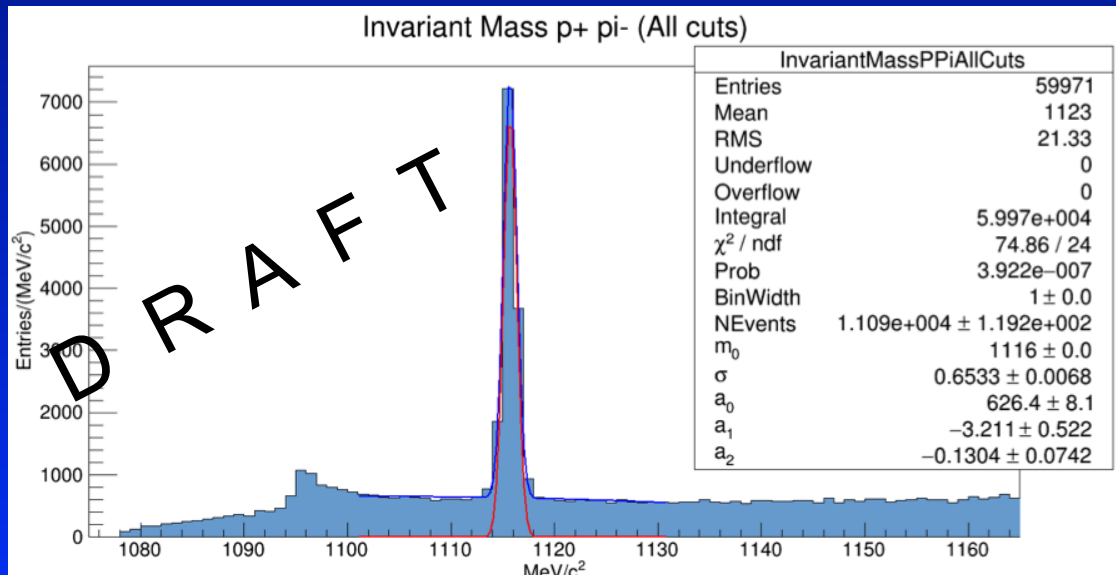
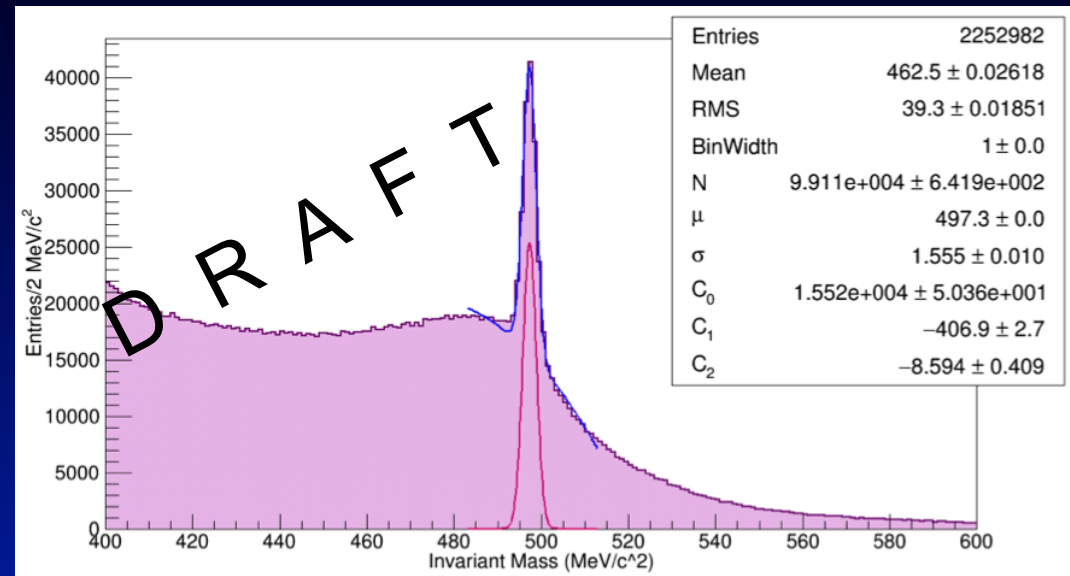
# Tesis de Maestría de Kevin

Se programa en C++, se estudia al espectrómetro, y se seleccionan eventos con las características de la investigación requerida: eventos con un vértice, con 2 tracks, carga cero, la positiva compatible con ser un  $K^+$



# Otras Tesis

Otros estudios con vértices secundarios con carga cero incluyen la producción de  $K_s^0$  y  $\Lambda^0$



Una mayor estadística permite estudios de tiempo de vida, dependencia de producción en momento, y para diferentes haces

# Obtención del grado

En el programa de **Maestría en Física** se pide

- un trabajo de investigación inédita
- no es requisito de graduación el publicar los resultados\*

En el programa de **Doctorado en Física** se pide

- un trabajo de investigación inédita, y
- al menos una publicación arbitrada producida

# Conclusiones

- La participación de estudiantes extranjeros en las universidades mexicanas es imperativa
- La colaboración con estudiantes de la Universidad Nacional de San Agustín es muy relevante para nuestra Universidad
- Los estudiantes que participaron en estos trabajos continúan haciendo investigación
- Los resultados son producto de sus propios esfuerzos