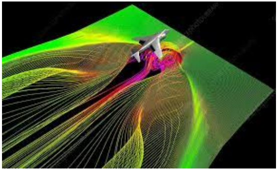
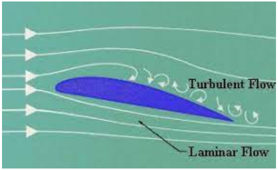
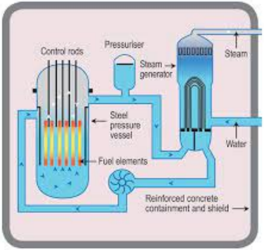
Introducción a la ecuación de Navier-Stokes

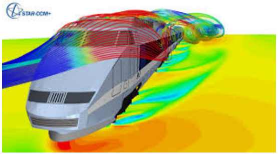
Edhin F. Mamani
7mo Encuentro de Egresados de la Escuela Profesional de Física

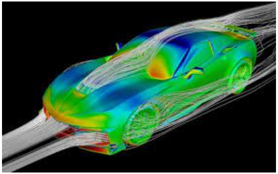
Motivación

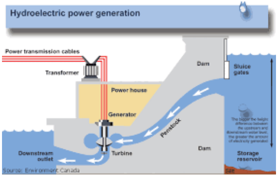



Turbulent Flow
Laminar Flow


Control rods
Pressuriser
Steam generator
Steam
Steel pressure vessel
Water
Fuel elements
Reinforced concrete containment and shield


STAR-CCM+




Hydroelectric power generation
Power transmission cables
Transformer
Dam
Sluice gates
Power house
Generator
Penstock
Downstream outlet
Turbine
Dam
Storage reservoir
Source: Environment Canada

Historia

- En 200 A.C Arquímedes ya estudio los principios de la hidrostática y resolvió cuestiones de cuerpos en reposo en fluidos y su estabilidad.
- Con el descubrimiento del Calculo, en 176to2 Daniel Bernoulli hizo aportaciones en su obra Hidrodinámica.
- En 1752, D'Alembert modelo los fluidos con ecuaciones diferenciales parciales en lugar de ecuaciones algebraicas como Bernoulli.
- En 1757, Euler dedujo las ecuaciones de continuidad, y la ecuación sin el termino de viscosidad.
- En 1823, Navier incluyo la fricción entre las partículas de fluido a través de un modelo de moléculas.
- En 1845, Stokes dedujo rigurosamente las ecuaciones de Navier.
- En 1880, Reynolds introdujo un parámetro que lleva su nombre y es muy importante para la comprensión de los fluidos.

6to Problema del Milenio

- En 1900, el gran matemático David Hilbert propuso una lista de 20 problemas matemáticos para guiar el desarrollo de la matemática del siglo XX.
- En el año 2000, el Instituto Clay de Matemáticas, propuso 7 problemas, llamados Problemas del Milenio.
- El 6to problema se refiere a la Ecuación de Navier-Stokes.
- Hay un premio de un millón de dolares para las personas que resuelvan el problema (el cual tiene que ser verificado por pares).
- Aunque tenemos muchos mediciones y data de los experimentos, estrictamente no sabemos si toda esta data es descrita por soluciones de la ecuación de Navier-Stokes.

6to Problema del Milenio: Existencia global y suavidad de soluciones para el problema de Cauchy de la ecuación de Navier-Stokes

Datos de entrada:

- Viscosidad $\nu > 0$.
- Distribución inicial de velocidades suave $u_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ libre de divergencia: $\nabla \cdot u_0 = 0$ que decae suficientemente rápido en el infinito,
- Fuerza nula: $f(x,t) \equiv 0$.
- Mostrar que existe una solución global suave $u : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ que resuelve el problema:

$$\frac{\partial}{t} u + (u \cdot \nabla) u = \nu \Delta u - \nabla p \tag{1}$$

$$\nabla u = 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}^3 \tag{3}$$

Estado del arte: Respuestas parciales en 2D

- Leray resolvió el problema en 2D para dominios ilimitados.
- La vorticidad $\omega = \nabla \times u$ es un escalar y satisface

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + u\nabla\omega = \nu\Delta\omega.$$

- Tiene un principio del máximo. Así se puede mostrar que ω es limitado y obtener la regularidad de u.
- Ladyzhenskaya resolvió el problema 2D para dominios finitos con frontera (Problema de valor inicial y de frontera).
- Hay un estimado para la energía:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}|u(x,t_2)|^2 dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^2} \nu|\nabla u|^2 dxdt = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|u(x,t_1)|^2 dx.$$

- Usando soluciones para la ecuación de Navier-Stokes linearizada.
- Combinado las dos estimativas y tratando la parte no lineal como una perturbación, se prueba la regularidad de la solución.

Estado del arte: Blowup time en 3D

- La solución en 3D existe para condiciones iniciales muy pequeñas:

$$\|u_0\| \leq C,$$

para alguna norma adecuada.

- Gracias a las simetrías de escala de la ecuación, se puede permitir condiciones iniciales u_0 cualquiera pero a costo de que las soluciones existan para un intervalo pequeño $[0, T)$:

$$u(x,t), p(x,t) \longrightarrow \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t).$$

$$u_0(x) \longrightarrow \lambda u_0(\lambda x).$$

- T depende de la condición inicial u_0.
- Fijando u_0, el máximo T para el que existe la solución u, se llama Blowup time (Tiempo de explosión).

Dicotomia

- Dicotomía:
  1. O existe soluciones suaves para cualquier condición inicial.
  2. O existe una condición inicial especifica para la cual existe una solución con blowup finito.
- Para otras ecuaciones que comparten con Navier-Stokes propiedades que son usadas para la teoría, se vio que permiten singularidades en tiempo finito y soluciones con blowup time finito.
- Simulaciones numéricas sugieren que existen soluciones con blowup finito, pero no son concluyentes.

Consecuencias del Blowup finito

- La velocidad se vuelve ilimitada cerca del tiempo Blowup T:

$$u(x,t) \to \infty \text{ as } t \to T.$$

- Para una norma adecuada, la energía cinética se vuelve infinita

$$\|u\| = \int_{R_3} |u| = \infty.$$

- Para el caso particular de la ecuación de Euler ($\nu = 0$), la vorticidad diverge rápidamente:

$$\int_0^T \Big(\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |\omega(x,t)| \Big) dt = \infty.$$

Soluciones Débiles

- Considere funciones con soporte compacto, extremadamente suaves, llamadas funciones de prueba:

$$\theta : \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3 \qquad \phi : \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}.$$

- Gracias a la regla del producto de la derivada, podemos integrar por partes y trasladar las derivadas a las funciones de prueba:

$$\int u\frac{\partial\theta}{\partial t}dxdt - \sum_{i,j}\int u_i u_j \frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}dxdt = \nu\int u\Delta\theta dxdt + \int f\theta dxdt - \int p\nabla\cdot\theta d$$

$$\int u\nabla\dot{\phi}dxdt = 0.$$

- Una solución u a las ecuaciones previas, es llamada solución débil de la ecuación de Navier-Stokes. Por contraste las soluciones a la ecuación de Navier-Stokes original son llamadas fuertes.
- u no tiene que ser 2 veces diferenciable sino solo L^2-integrable ($u \in L^2$). Similarmente $f, p \in L^1$.

Solucione Débiles

- Un método de solución es mostrar que la ecuación de Navier-Stokes tiene soluciones débiles. Luego por métodos alternativos mostrar que estas soluciones débiles son suaves, i.e., las soluciones débiles de hecho eran fuertes.
- Leray (1934) mostró que la ecuación de Navier-Stokes en 3D siempre tiene soluciones débiles u, p.
- La unicidad de estas soluciones débiles no sabe aun.
- Para llevar a cabo el método por soluciones débiles, la unicidad es un paso importante.

Tamaño del conjunto singular de soluciones débiles

- Otro método para probar la regularidad de las soluciones débiles es a través de sus conjunto singulares.
- Dada una solución débil u a las ecuaciones de Navier-Stokes, su conjunto singular es:

$$E_u = \{(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times [0\infty) : u \text{ es ilimitado en toda vecindad de })(x_0, t_0)\}$$

- Para (x, t) fuera de E_u, se puede corregir u tal que sea suave en una vecindad de (x, t).
- Entonces podemos suavizar u alrededor de cualquier punto no singular, esto si el conjunto singular no es grande.

Tamaño del conjunto singular de soluciones débiles

- Scheffer y Cafarelli mostraron: Dada una condición inicial u_0 y una fuerza f, entonces existe al menos una solución débil u tal que E_u tiene dimensión de Hausdorff cero.
- Esto es, u puede corregirse para ser suave salvo en un conjunto de medida cero.
- Pero esto no dice nada de la unicidad de soluciones.

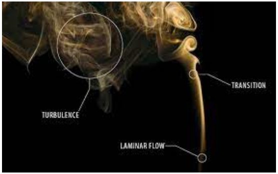
Complejidad del problema

- Hay limitadas técnicas generales para analizar ecuaciones diferenciales parciales.
- No se descubrieron estructuras matemáticas especiales dentro de las ecuaciones. Así, no hay tratamiento especial personalizado para Navier-Stokes, i.e., la teoría funciona para una familia de ecuaciones parecidas a Navier-Stokes.
- Para otros miembros de la familia, las soluciones no son siempre regulares.

Complejidad del problema

- Técnicas disponibles:
  1. Estimativas lineales
  2. Análisis de perturbación
  3. Métodos de Energía
  4. Técnicas escalares: Principio del máximo, Principios de comparación, Desigualdades de Harnack, etc.
  5. Técnicas de re-escalamiento y de tiempo blowup.
- Técnicas de blowup, re-escalamiento y cantidades escalares escondidas fueron usadas con éxito para resolver el problema de regularidad en 5D para el problema estacionario, sin embargo esas técnicas no se pudieron extender a 3D.

Turbulencia



Turbulencia

- Comportamiento caótico de la presión y la velocidad. Distinto del flujo laminar.
- Irregularidad: los modelos son mas estadísticos que deterministicos.
- Alta difusividad: altas tasas de transporte de masa, momento y energia.
- El fenómeno de turbulencia se da usualmente (pero no necesariamente) para números de Reynolds altos:

$$Re = \frac{uL}{\nu} \geq 5000.$$

- Fuerzas inerciales y energías cinéticas altas dominan sobre fuerzas viscosas.

Turbulencia

- Una de las motivaciones para el 6to problema del milenio es dar algo de luz en el fenómeno de turbulencia.
- El problema de turbulencia esta abierto incluso en dimensión 2.
- Encontrar una algoritmo para reemplazar la mayoría de grados de libertad desconocidos del sistema por estadísticas adecuadas, para obtener una pequeña cantidad de variable importantes.


Thank you
Ευχαριστώ
Kiitos
谢谢
Obrigado
Merci
Danke
תודה
Thank you
Gracias
Grazie
شكرا
감사합니다
Спасибі
Mulţumesc
Asante