

Modos cuasinormales de la perturbación escalar en el agujero negro BTZ

Brian John Gutierrez Vilca¹

¹Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa. Facultad de Ciencias Naturales y Formales.
Escuela Profesional de Física

8 de noviembre del 2022

- 1 Resumen
- 2 Introducción
- 3 El agujero negro BTZ
- 4 La perturbación escalar en el agujero negro BTZ
- 5 Integración Numérica
- 6 Modos cuasinormales
- 7 Referencias

- 1 Resumen
- 2 Introducción
- 3 El agujero negro BTZ
- 4 La perturbación escalar en el agujero negro BTZ
- 5 Integración Numérica
- 6 Modos cuasinormales
- 7 Referencias

Vamos a determinar los modos cuasinormales (modos de oscilación cuya frecuencia tiene parte real y parte imaginaria), originados debido a la perturbación escalar en agujeros negros BTZ (Bañados, Teitelboim y Zanelli), para ello resolveremos la ecuación de Klein-Gordon, con el objetivo de obtener una ecuación diferencial parcial hiperbólica también llamada ecuación tipo Schrödinger, que puede ser resuelta por el método de integración numérica.

- 1 Resumen
- 2 Introducción**
- 3 El agujero negro BTZ
- 4 La perturbación escalar en el agujero negro BTZ
- 5 Integración Numérica
- 6 Modos cuasinormales
- 7 Referencias

El descubrimiento de las ondas gravitacionales por la colaboración LIGO en septiembre de 2015, sirvió como evidencia concreta de la existencia de agujeros negros. Las ondas gravitacionales presentan una prueba novedosa de la teoría de la gravitación, sus características dependen únicamente de la estructura espacio-temporal de fondo y pueden ser estudiadas de forma clásica, así como en teorías alternativas de la gravitación.

- 1 Resumen
- 2 Introducción
- 3 El agujero negro BTZ**
- 4 La perturbación escalar en el agujero negro BTZ
- 5 Integración Numérica
- 6 Modos cuasinormales
- 7 Referencias

El agujero negro BTZ

El agujero negro BTZ es una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa, la cual fue determinada por Máximo Bañados, Claudio Teitelboim y Jorge Zanelli en el año 1994 y es muy interesante debido a que no posee singularidad, tiene simetría esférica y está caracterizado para fines de esta tesis únicamente por su masa.

El agujero negro BTZ

De acuerdo con la convención de Misner, la ecuación de Einstein con constante cosmológica se define de la siguiente manera en un espacio-tiempo vacío:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + g_{\alpha\beta}\Lambda = 0. \quad (1)$$

Donde la constante cosmológica Λ , está relacionada con la dimensión del espacio-tiempo de esta manera:

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2l^2}. \quad (2)$$

Donde l es el radio AdS y D es la dimensión del espacio-tiempo, siendo que para $D = 3$ la constante cosmológica para el agujero negro BTZ es:

$$\Lambda = -\frac{1}{l^2}. \quad (3)$$

El agujero negro BTZ

Si consideramos un agujero negro en 2+1 dimensiones, en general, su métrica puede definirse de la siguiente manera:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2. \quad (4)$$

y podemos demostrar que la solución a las ecuaciones de campo de Einstein es:

$$ds^2 = -\left(-M + \frac{r^2}{l^2}\right)dt^2 + \left(-M + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2. \quad (5)$$

- 1 Resumen
- 2 Introducción
- 3 El agujero negro BTZ
- 4 La perturbación escalar en el agujero negro BTZ**
- 5 Integración Numérica
- 6 Modos cuasinormales
- 7 Referencias

La perturbación escalar en el agujero negro BTZ

Si consideramos la ecuación de Klein-Gordon para un campo sin masa, la ecuación se reduce a :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0. \quad (6)$$

Desarrollando:

$$-\partial_t \left(\frac{1}{f} \partial_t \Phi \right) + \frac{1}{r} \partial_r (rf \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 \Phi = 0. \quad (7)$$

Asimismo, sabemos que la función Φ , tiene dependencia con respecto a las tres coordenadas, así, podemos definir:

$$\Phi(t, r, \phi) = \Psi(t, r) \Theta(\phi). \quad (8)$$

La perturbación escalar en el agujero negro BTZ

Utilizando el método de separación de variables:

$$-\frac{r^2}{\Psi} \partial_t \left(\frac{1}{f} \partial_t \Psi \right) + \frac{r}{\Psi} \partial_r (rf \partial_r \Psi) = \frac{1}{\Theta} \partial_\phi^2 \Theta = m^2, \quad (9)$$

donde m es la constante de separación de variables, que será identificada como el número multipolar de la perturbación, recurrimos nuevamente al método de separación de variables, considerando la siguiente dependencia de coordenadas.

$$\Psi(t, r) = R(r)T(t). \quad (10)$$

De esta manera podemos llegar a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{T} \partial_\phi^2 T = \frac{f}{Rr} \partial_r (rf \partial_r R) - \frac{fm^2}{r^2} = -\omega^2. \quad (11)$$

$$\frac{f}{r} \partial_r (rf \partial_r R) - \frac{fm^2 R}{r^2} + \omega^2 R = 0, \quad (12)$$

donde ω es otra constante de separación, que será identificada como la frecuencia cuasinormal de la perturbación.

La perturbación escalar en el agujero negro BTZ

La función radial puede ser expresada de la siguiente manera

$$R(r) = N(r)\psi(r). \quad (13)$$

introducimos una nueva coordenada, la cual es conocida en modos cuasi-normales como la coordenada tortuga $r_*(r)$ y nos servirá para determinar una ecuación tipo Schrödinger. Así, la Ec. (12), puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{rf} \left(\frac{\psi}{f} \partial_{r_*} N + \frac{N}{f} \partial_{r_*} \psi \right) \left(f + \frac{r}{f} \partial_{r_*} f \right) + \frac{1}{f^2} \partial_{r_*} N \partial_{r_*} \psi + \frac{\psi}{f} \partial_{r_*} \left(\frac{1}{f} \right) \partial_{r_*} N \\ & + \frac{\psi}{f^2} \partial_{r_*}^2 N + \frac{\partial_{r_*} N \partial_{r_*} \psi}{f^2} + \frac{N}{f} \partial_{r_*} \left(\frac{1}{f} \right) \partial_{r_*} \psi + \frac{N}{f^2} \partial_{r_*}^2 \psi - \frac{N\psi m^2}{r^2 f} + \frac{\omega^2 N\psi r}{rf^2} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

De esta ecuación, podemos definir la coordenada tortuga:

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{1}{f}. \quad (15)$$

La perturbación escalar en el agujero negro BTZ

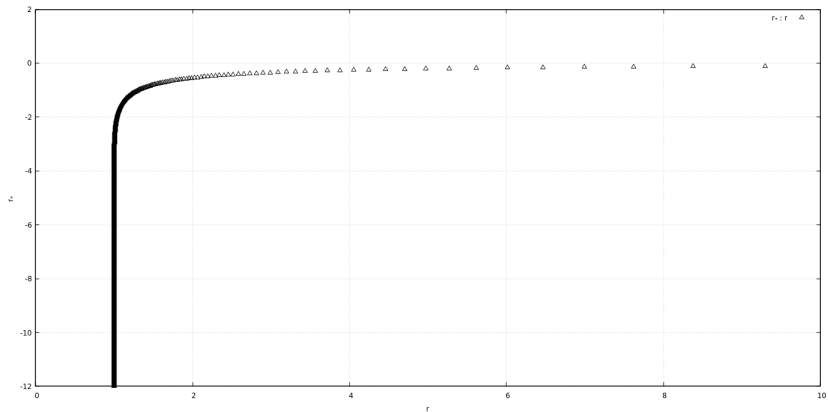


Figura: Transformación de coordenadas considerando $r_+ = 1$.

La perturbación escalar en el agujero negro BTZ

coordenada tortuga. Asimismo, la ecuación que buscamos no tiene derivada primera con respecto a la coordenada tortuga, por ello su coeficiente debe ser cero:

$$N + \frac{Nr}{f^2} \partial_{r_*} f + \frac{2r}{f} \partial_{r_*} N + rN \partial_{r_*} \left(\frac{1}{f} \right) = 0. \quad (16)$$

$$\frac{dN}{N} = -\frac{dr}{2r}. \quad (17)$$

$$N(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (18)$$

Asimismo, de la separación de variables podemos obtener la forma general que tiene el campo:

$$\Phi(t, r, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \psi(r) e^{-i\omega t} e^{im\phi}. \quad (19)$$

La perturbación escalar en el agujero negro BTZ

Con este *Ansatz* para el campo escalar y determinada la coordenada tortuga, podemos obtener la ecuación tipo Schrödinger

$$(\partial_{r_*}^2 + \omega^2) \psi = V\psi. \quad (20)$$

Donde V es llamado potencial, por la semejanza que tiene esta ecuación con la ecuación de Schrödinger.

$$V(r) = \frac{3r^2}{4l^4} + \frac{m^2}{l^2} - \frac{M}{2l^2} - \frac{M^2}{4r^2} - \frac{m^2 M}{r^2}. \quad (21)$$

Contenido

- 1 Resumen
- 2 Introducción
- 3 El agujero negro BTZ
- 4 La perturbación escalar en el agujero negro BTZ
- 5 Integración Numérica**
- 6 Modos cuasinormales
- 7 Referencias

Integración Numérica

Consideremos un sistema de coordenadas (u, v) , las cuales son las coordenadas tipo luz, en términos de las coordenadas (t, r_*) , estas se relacionan mediante la siguiente transformación de coordenadas:

$$\begin{aligned}u &= t - r_* \\v &= t + r_*\end{aligned}\tag{22}$$

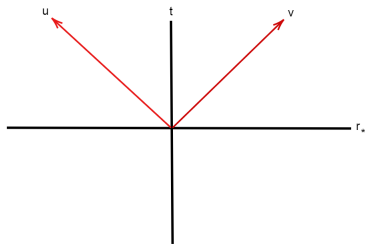


Figura: Coordenadas tipo luz.

Ahora, sabiendo que $\Psi(t, r) \sim e^{-i\omega t}$, reescribimos la ecuación tipo Schrödinger Ec.(20) de la siguiente manera:

$$(-\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2) \Psi = -V\Psi. \quad (23)$$

Utilizando las coordenadas tipo luz, ahora obtenemos:

$$4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial_u \partial_v} = -V\Psi.$$

Que, integrando del siguiente modo, se torna:

$$\int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} dudv = -\frac{1}{4} \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} V\Psi dudv.$$

$$\Psi(u_1, v_1) - \Psi(u_0, v_1) - \Psi(u_1, v_0) + \Psi(u_0, v_0) = -\frac{1}{4} \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} V\Psi dudv.$$

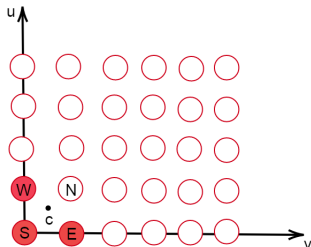


Figura: Esquema N,S,W,E.

Donde, utilizando el teorema del valor medio y asignando valores definidos en términos de los puntos cardinales (N,S,E,O) y un punto Centro (C), como se muestra en la Fig., podemos obtener:

$$\Psi(N) - \Psi(E) - \Psi(O) + \Psi(S) = -\frac{1}{4}V(C)\Psi(C)\Delta u\Delta v.$$

- 1 Resumen
- 2 Introducción
- 3 El agujero negro BTZ
- 4 La perturbación escalar en el agujero negro BTZ
- 5 Integración Numérica
- 6 Modos cuasinormales**
- 7 Referencias

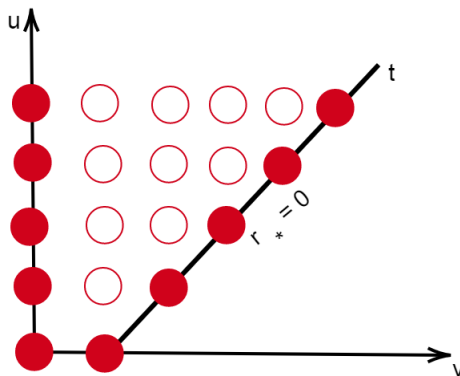


Figura: Esquema de integración.

Modos cuasinormales

Se hicieron simulaciones considerando el horizonte de eventos fijo, esto es $r_+ = 1$.

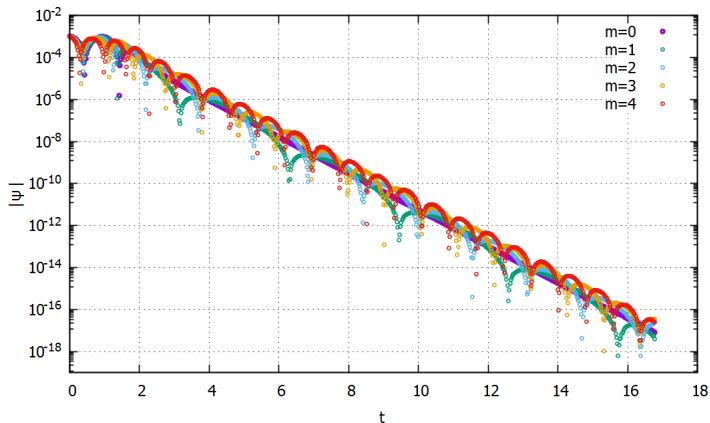


Figura: Modos cuasinormales para la perturbación escalar con m variable y $r_+ = 1$.

m	ω_r	ω_i
0	0.0000	-2.0028
1	0.9969	-1.9983
2	1.9988	-2.0010
3	3.0001	-2.0011
4	4.0009	-2.0000
5	5.0004	-1.9984

Cuadro: Frecuencias cuasinormales para la perturbación escalar con m variable y $r_+ = 1$.

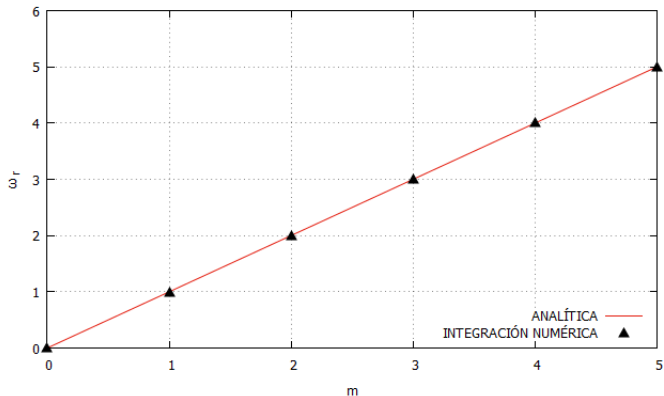


Figura: Frecuencia real para la perturbación escalar considerando m variable y $r_+ = 1$.

Modos cuasinormales

Realizamos otro conjunto de simulaciones, en este caso hicimos $m = 0$, lo cual corresponde al llamado “modo fundamental” de los modos cuasinormales, en este caso obtuvimos lo siguiente:

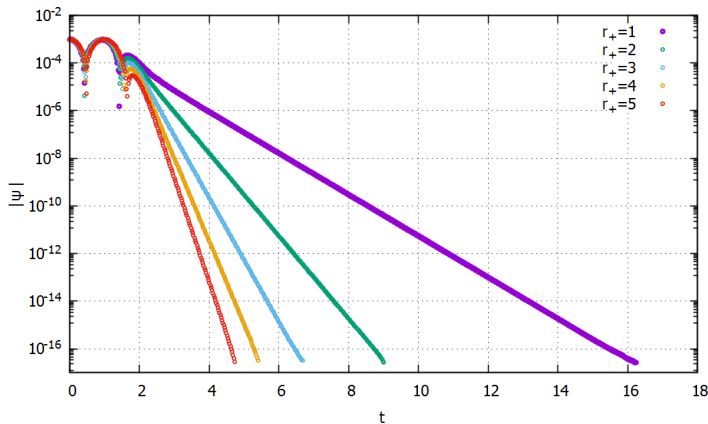


Figura: Modos cuasinormales para la perturbación escalar con $m = 0$ y r_+ variable.

r_+	ω_r	ω_i
1	0	-2.0028
2	0	-4.0028
3	0	-6.0219
4	0	-8.0334
5	0	-10.059

Cuadro: Frecuencias cuasinormales para la perturbación escalar con $m = 0$ y r_+ variable.

Modos cuasinormales

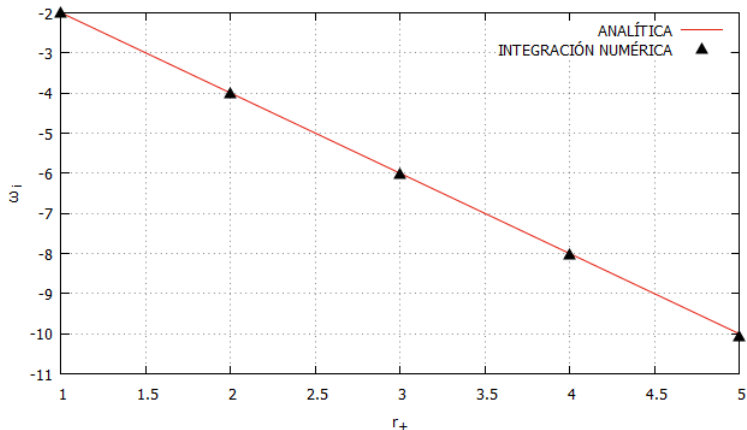










Figura: Frecuencia imaginaria para la perturbación escalar considerando r_+ variable y $m = 0$.

Contenido

- 1 Resumen
- 2 Introducción
- 3 El agujero negro BTZ
- 4 La perturbación escalar en el agujero negro BTZ
- 5 Integración Numérica
- 6 Modos cuasinormales
- 7 Referencias**

-  Cardoso, Vitor and Lemos, José P. S.
Scalar, electromagnetic, and Weyl perturbations of BTZ black holes: Quasinormal modes, 2001.
Physical Review D
-  Schutz, Bernard
First course in general relativity.
Cambridge university press, 2009
-  Bañados, Máximo and Teitelboim, Claudio and Zanelli, Jorge
Dimensionally continued black holes.
Physical Review D, 1994
-  Bañados, Máximo and Henneaux, Marc and Teitelboim, Claudio and Zanelli, Jorge
Geometry of the 2+1 black hole.
Physical Review D, 1993

-  Cuadros-Melgar, Bertha and de Oliveira, Jeferson and Pellicer, C. E.
Stability analysis and area spectrum of three-dimensional Lifshitz black holes.
Physical Review D, 2012
-  Konoplya, R. A. and Zhidenko, Alexander
Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory.
Reviews of Modern Physics, 2011
-  Casals, Marc and Fabbri, Alessandro and Martínez, Cristian and Zanelli, Jorge
Quantum-corrected rotating black holes and naked singularities in 2+1 dimensions.
Physical Review D, 2019
-  Subrahmanyan Chandrasekhar
The mathematical theory of black holes.
Oxford university press, 1998