Agujeros negros BTZ-GB: Termodinámica y estabilidad

Bertha Cuadros-Melgar

Universidade of São Paulo
Campus Lorena, SP - Brasil

arXiv:2206.06516 (aceptado en Phys. Rev. D)

VII Encuentro de Egresados de la EPF
(07-10 de Noviembre de 2022)

Plan de la Charla

- ♣ Motivación e Introducción

Plan de la Charla

- ♣ Motivación e Introducción
- ♣ Agujero negro GB-BTZ

Plan de la Charla

- Motivación e Introducción
- Agujero negro GB-BTZ
- Perturbaciones escalares: FCN y modos hidrodinámicos.

Plan de la Charla

- Motivación e Introducción
- Agujero negro GB-BTZ
- Perturbaciones escalares: FCN y modos hidrodinámicos.
- Perturbaciones espinoriales

Plan de la Charla

- Motivación e Introducción
- Agujero negro GB-BTZ
- Perturbaciones escalares: FCN y modos hidrodinámicos.
- Perturbaciones espinoriales
- Aspectos entrópicos: límite de Bekenstein, correcciones semiclásicas.

Motivación e Introducción

- ♣ Gravitación en baja dimensionalidad $\rightarrow$ BTZ.

Motivación e Introducción

- Gravitación en baja dimensionalidad $\rightarrow$ BTZ.
- Teoría de Lovelock $\rightarrow$ Gauss-Bonnet (GB).

Motivación e Introducción

- Gravitación en baja dimensionalidad $\rightarrow$ BTZ.
- Teoría de Lovelock $\rightarrow$ Gauss-Bonnet (GB).
- GB en 4D $\rightarrow$ teoría de Horndeski (gravitación escalar-tensorial).

Motivación e Introducción

- ♣ Gravitación en baja dimensionalidad $\rightarrow$ BTZ.
- ♣ Teoría de Lovelock $\rightarrow$ Gauss-Bonnet (GB).
- ♣ GB en 4D $\rightarrow$ teoría de Horndeski (gravitación escalar-tensorial).
- ♣ GB en 3D $\rightarrow$ solución BTZ generalizada.

Motivación e Introducción

- Gravitación en baja dimensionalidad $\rightarrow$ BTZ.
- Teoría de Lovelock $\rightarrow$ Gauss-Bonnet (GB).
- GB en 4D $\rightarrow$ teoría de Horndeski (gravitación escalar-tensorial).
- GB en 3D $\rightarrow$ solución BTZ generalizada.
- Objetivos: Perturbaciones, entropía.

Agujero Negro GB-BTZ

[R. A. Hennigar, D. Kubiznak, R. B. Mann, and C. Pollack, PLB 808, 135657 (2020)].

La acción de la teoría es:

$$S = \int d^3x \sqrt{-g} \left\{ R - 2\Lambda + \alpha \left[\phi \mathcal{G} + 4G^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - 4(\partial\phi)^2 \Box\phi + 2((\nabla\phi)^2)^2 \right] \right\} , \tag{1}$$

con $\mathcal{G} = R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2$.

♣ Obtenida por una reducción dimensional tipo KK o por el método de Ross-Mann.

Una solución tipo agujero negro es:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\varphi^2\,, \tag{2}$$

con

$$f(r)_{\pm} = -\frac{r^2}{2\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{r^2}\left(-M + \frac{r^2}{L^2}\right)}\right)\,, \tag{3}$$

$$\phi(r) = \ln\left(\frac{r}{L}\right)\,. \tag{4}$$

Una solución tipo agujero negro es:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\varphi^2 \,, \tag{2}$$

con

$$f(r)_\pm = -\frac{r^2}{2\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{r^2}\left(-M + \frac{r^2}{L^2}\right)}\right) \,, \tag{3}$$

$$\phi(r) = \ln\left(\frac{r}{L}\right) \,. \tag{4}$$

- ♣ Horizonte de eventos: $r_+ = L\sqrt{M}$.
- ♣ Para estar bien definida en el infinito espacial: $\alpha > -L^2/4$.

♣ Caso $\alpha > 0$: Singularidad de rama (branch)

$$r_b = 2\sqrt{\frac{\alpha}{L^2 + 4\alpha}}\, r_+ < r_+ \,. \tag{5}$$

$$K \equiv R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} \sim \frac{r_b^3 (L^2 + 4\alpha)}{32\alpha^2 L^2 (r - r_b)^3} + \cdots \,. \tag{6}$$

♣ Caso $\alpha > 0$: Singularidad de rama (branch)

$$r_b = 2\sqrt{\frac{\alpha}{L^2 + 4\alpha}}\, r_+ < r_+\,. \tag{5}$$

$$K \equiv R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} \sim \frac{r_b^3(L^2 + 4\alpha)}{32\alpha^2 L^2 (r - r_b)^3} + \cdots\,. \tag{6}$$

♣ Caso $-L^2/4 < \alpha < 0$: Singularidad en $r = 0$.

$$K \sim -\frac{2M}{\alpha r^2} + \cdots\,. \tag{7}$$

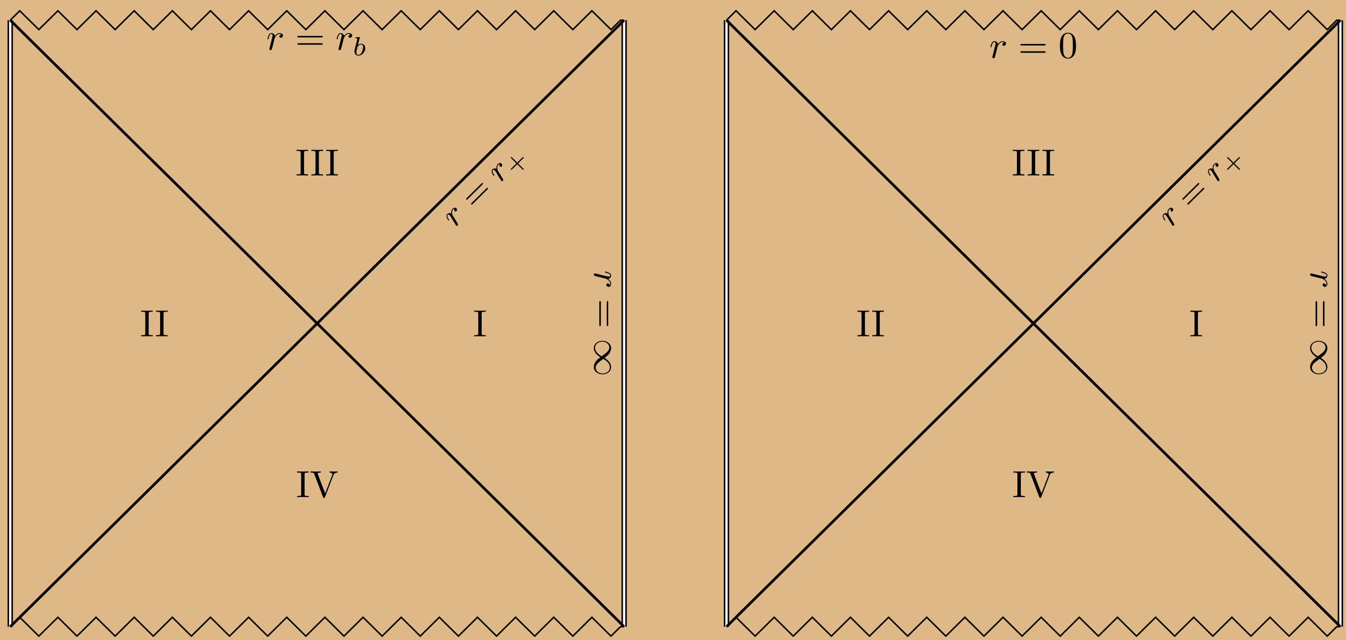

Figura 1: Diagrama de Penrose-Carter para el agujero negro GB-BTZ $(2+1)$-dimensional con $\alpha > 0$ (izquierda) y $-L^2/4 < \alpha < 0$ (derecha).

Perturbación escalar

Consideremos un campo escalar no masivo $\Psi(x^\mu)$,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi\right)=0\,, \tag{8}$$

donde

$$\Psi(t,r,\varphi)=\sum_m\frac{\psi(r,t)}{\sqrt{r}}e^{im\varphi}=\sum_m\frac{R(r)}{\sqrt{r}}e^{-i\omega t+im\varphi}\,, \tag{9}$$

tal que

$$\frac{d^2R}{dr_*^2}+\left(\omega^2-V(r)\right)R=0\,, \tag{10}$$

con

$$V(r)=f(r)\left(\frac{m^2}{r^2}-\frac{f(r)}{4r^2}+\frac{1}{2r}\frac{df(r)}{dr}\right)\,. \tag{11}$$

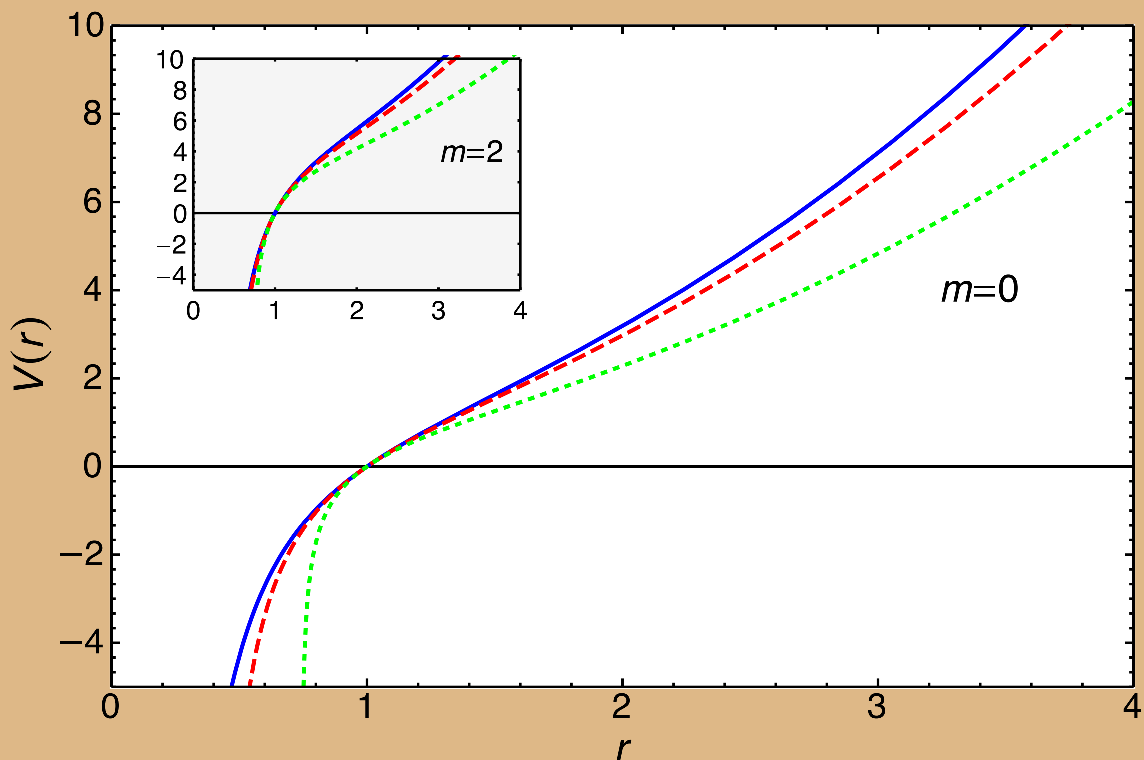

Figura 2: Panel principal: Potencial escalar efectivo $V(r)$ con $m = 0$, $M = L = 1$ para $\alpha = 0$ (azul), $\alpha = 5\times10^{-2}$ (rojo), and $\alpha = 3\times10^{-1}$ (verde). Panel secundario: $m = 2$, $M = L = 1$.

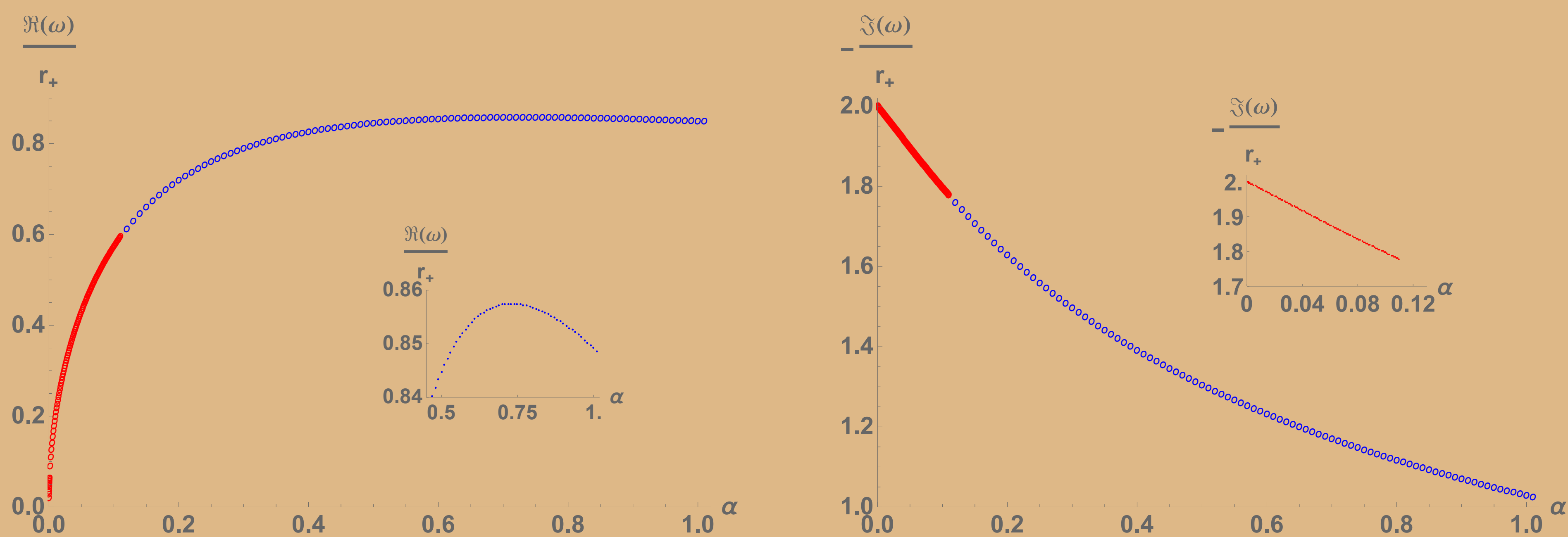

Figura 3: Modos cuasinormales escalares fundamentales del agujero negro GB-BTZ para diferentes α.

Tabla 1: Modos cuasinormales escalares con $L = 1$.

		$r_+ = 1$		$r_+ = 10$		$r_+ = 100$	
α	m	$\Re(\omega)$	$-\Im(\omega)$	$\Re(\omega)$	$-\Im(\omega)$	$\Re(\omega)$	$-\Im(\omega)$
$1 \cdot 10^{-4}$	0	0.02010	1.99975	0.20405	19.99609	2.04054	199.96092
	1	0.99965	1.99883	1.02051	19.99608	2.27236	199.96092
$1 \cdot 10^{-3}$	0	0.06333	1.99781	0.63329	19.97806	6.33286	199.78061
	1	1.00185	1.99727	1.18394	19.97796	6.41138	199.78060
$1 \cdot 10^{-2}$	0	0.19881	1.97948	1.98807	19.79481	19.88068	197.94808
	1	1.01893	1.97500	2.22700	19.79394	19.90599	197.94799
$1 \cdot 10^{-1}$	0	0.57232	1.79642	5.72319	17.96419	57.23187	179.64185
	1	1.13028	1.77622	5.80817	17.96072	57.24044	179.64150
$5 \cdot 10^{-1}$	0	0.84478	1.30425	8.44776	13.04249	84.47757	130.42490
	1	1.20626	1.27595	8.49345	13.03798	84.48215	130.42445

Modos Hidrodinámicos

♣ Límite hidrodinámico: número de onda $\ll$ temperatura del sistema.

♣ Correspondencia gauge/gravedad: tiempo de termalización $\propto$ inverso de la frecuencia imaginaria fundamental.

Modos Hidrodinámicos

♣ Límite hidrodinámico: número de onda $\ll$ temperatura del sistema.

♣ Correspondencia gauge/gravedad: tiempo de termalización $\propto$ inverso de la frecuencia imaginaria fundamental.

Sea $\mathfrak{w} = \omega/2\pi T$ y $\mathfrak{q} = m/2\pi T$. En el límite $\mathfrak{q} \to 0$ y $\mathfrak{w} << 1$, haciendo $u = r_+/r$:

$$R''(u) + \left[\frac{h'}{h} - \frac{1}{u}\right] R'(u) + \frac{4\alpha^2}{h^2 L^4}\mathfrak{w}^2 R(u) = 0, \tag{12}$$

con

$$h = 1 - \left[1 + \frac{4\alpha}{L^2}(1-u^2)\right]^{1/2}. \tag{13}$$

Podemos expandir $R(u)$ como:

$$R(u) \approx h(u)^{\sigma} \left(F_0(u) + i\mathfrak{w}F_1(u) + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2)\right). \tag{14}$$

♣ Aplicando la condición de modos entrantes en el horizonte $\rightarrow \sigma = -i\mathfrak{w}/2$.

♣ Aplicando la condición de Dirichlet en el infinito espacial, obtenemos las frecuencias permitidas que nos dan el tiempo de termalización:

$$\tau = \frac{\ln\left(\frac{L^2}{L^2-\alpha}\right)}{2\pi T}, \tag{15}$$

para $0 < \alpha < L^2$.

Perturbación espinorial

Consideramos un campo espinorial que obedece

$$i\gamma^{(a)}e_{(a)}^{\ \mu}\nabla_\mu\Phi = 0, \tag{16}$$

con

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{8}\omega^{(a)(b)}\left[\gamma_{(a)},\gamma_{(b)}\right], \tag{17}$$

$$\omega_\mu^{(a)(b)} = e_\nu^{(a)}\partial_\mu e^{(b)\nu} + e_\nu^{(a)}\Gamma^\nu_{\mu\rho}e^{\rho(b)}. \tag{18}$$

El espinor puede descomponerse como:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(t,r,\varphi) \\ \Phi_2(t,r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\left(r^2 f\right)^{1/4} e^{-i\omega t + im\varphi}\, Y_+(r) \\ \left(r^2 f\right)^{1/4} e^{-i\omega t + im\varphi}\, Y_-(r) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

Así:

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2\right) R_\pm = V_\pm R_\pm\,, \tag{20}$$

con $R_\pm = Y_+ \pm Y_-$ y

$$V_\pm = m^2 \frac{f}{r^2} \pm m\frac{\sqrt{f}}{r}\left[\frac{1}{2}\frac{df}{dr} - \frac{f}{r}\right]. \tag{21}$$

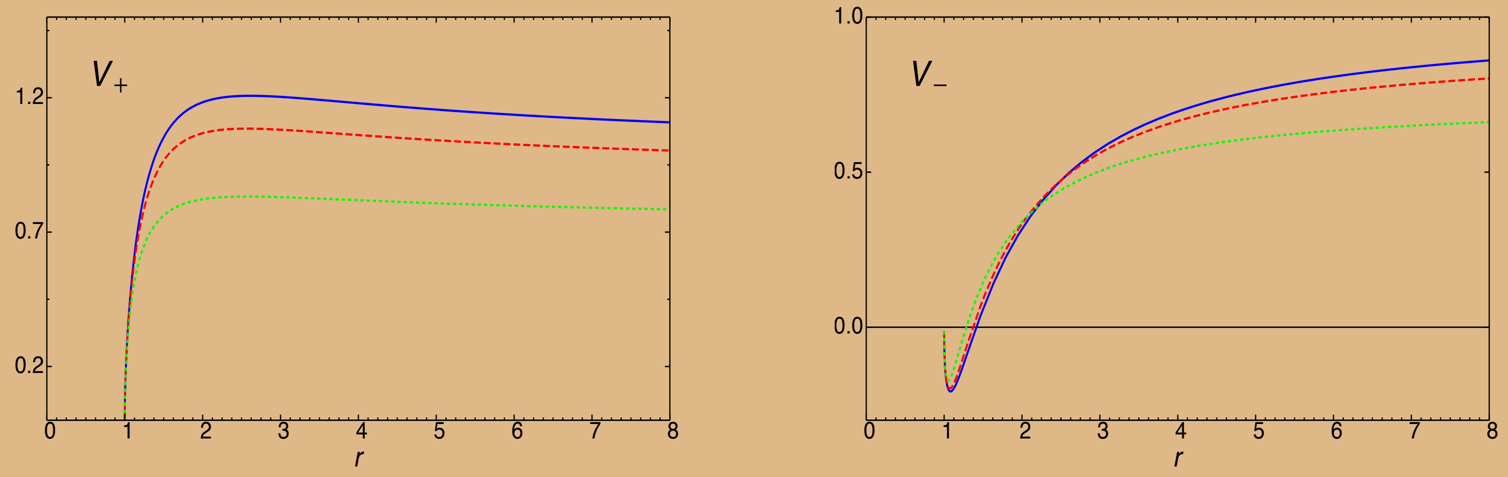

Figura 4: Potenciales V_+ (derecha) y V_- (izquierda) para el espinor sin masa con $\alpha = 0$ (azul), $\alpha = 0{,}1$ (rojo) y $\alpha = 0{,}5$ (verde).

- ♣ Modos puramente no-oscilatorios para V_-.
- ♣ Transición de modos oscilatorios (r_+ pequeño) para no-oscilatorios (r_+ grande) para V_+.
- ♣ Para agujeros negros grandes la frecuencia $\propto r_+$.
- ♣ Para agujeros negros muy grandes, α no influye en la frecuencia.
- ♣ No existe isospectralidad.

Termodinámica

♣ Algunas propiedades:

$$T = \frac{r_+}{2\pi L^2}\,, \quad P = \frac{1}{8\pi L^2}\,, \quad V = \pi r_+^2\,,$$
$$M = \frac{r_+^2}{8L^2}\,, \quad S = \frac{\pi r_+}{2}\,, \quad \psi_\alpha = 0\,, \quad \text{tal que } P = \frac{T}{v}\,. \tag{22}$$

Termodinámica

♣ Algunas propiedades:

$$T = \frac{r_+}{2\pi L^2}\,, \quad P = \frac{1}{8\pi L^2}\,, \quad V = \pi r_+^2\,,$$

$$M = \frac{r_+^2}{8L^2}\,, \quad S = \frac{\pi r_+}{2}\,, \quad \psi_\alpha = 0\,, \quad \text{tal que } P = \frac{T}{v}\,. \tag{22}$$

♣ Geodésicas nulas y termodinámica:

$$\dot{r}^2 + V_{eff} = 0\,, \quad \text{con} \quad V_{eff} = \frac{fL^2}{r^2} - E^2\,. \tag{23}$$

Condiciones de la circunferencia fotónica: (24)

$$V_{eff} = 0\,, \quad \frac{dV_{eff}}{dr} = 0\,, \quad \frac{d^2V_{eff}}{dr^2} < 0 \quad \text{en } r_{ps}\,. \tag{25}$$

Límite de entropía de Bekenstein

Consideramos una partícula moviéndose cerca a un agujero negro:

$$E = \pi_t = g_{tt}\dot{t}\,, \quad J = -\pi_\phi = -g_{\phi\phi}\dot{\phi}\,. \tag{26}$$

Por conservación de energía $-m^2 = \pi_\mu \pi^\mu$ tenemos:

$$E^2 - \frac{f\,J^2}{r^2} - m^2 f = 0\,. \tag{27}$$

Límite de entropía de Bekenstein

Consideramos una partícula moviéndose cerca a un agujero negro:

$$E = \pi_t = g_{tt}\dot{t}\,, \quad J = -\pi_\phi = -g_{\phi\phi}\dot{\phi}\,. \tag{26}$$

Por conservación de energía $-m^2 = \pi_\mu \pi^\mu$ tenemos:

$$E^2 - \frac{f\,J^2}{r^2} - m^2 f = 0\,. \tag{27}$$

El acercamiento de la partícula termina cuando:

$$\int_{r_+}^{r_+ + \delta(R)} \sqrt{g_{rr}}\,dr = R\,. \tag{28}$$

En este punto de captura minimizamos la energía como
$E_{min} = \sqrt{f(r_+ + \delta)}\, m = \frac{m r_+ R}{L^2}$.

En este punto de captura minimizamos la energía como $E_{min} = \sqrt{f(r_+ + \delta)}\, m = \frac{m r_+ R}{L^2}$.

De la primera ley termodinámica tenemos:

$$dM = E_{min} = T\, dS = \frac{\kappa}{2\pi} dS\,, \tag{29}$$

donde

$$\kappa = \frac{f'}{2}|_{r=r_+} = \frac{r_+}{L^2}\,. \tag{30}$$

En este punto de captura minimizamos la energía como $E_{min} = \sqrt{f(r_+ + \delta)}\, m = \frac{m r_+ R}{L^2}$.

De la primera ley termodinámica tenemos:

$$dM = E_{min} = T\, dS = \frac{\kappa}{2\pi} dS\,, \tag{29}$$

donde

$$\kappa = \frac{f'}{2}\Big|_{r=r_+} = \frac{r_+}{L^2}\,. \tag{30}$$

Así, de la SLG, $S_{BH}(M + dM) \geq S_{BH}(M) + S$, tenemos:

$$S \leq 2\pi m R \equiv 2\pi E R\,. \tag{31}$$

Corrección semiclásica a la entropía

Consideramos un baño térmico de campos escalares afuera del horizonte:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) - \mu^2\Phi = 0\,. \tag{32}$$

Corrección semiclásica a la entropía

Consideramos un baño térmico de campos escalares afuera del horizonte:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) - \mu^2\Phi = 0\,. \tag{32}$$

Con el método de la pared de ladrillos de 't Hooft:

$$\text{Corte UV:} \qquad \Phi = 0 \text{ para } r \leq r_+ + \epsilon \tag{33}$$

$$\text{Corte IR:} \qquad \Phi = 0 \text{ para } r \geq L \gg r_+\,. \tag{34}$$

Corrección semiclásica a la entropía

Consideramos un baño térmico de campos escalares afuera del horizonte:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) - \mu^2\Phi = 0\,. \qquad (32)$$

Con el método de la pared de ladrillos de 't Hooft:

$$\text{Corte UV:} \qquad \Phi = 0 \text{ para } r \leq r_+ + \epsilon \qquad (33)$$

$$\text{Corte IR:} \qquad \Phi = 0 \text{ para } r \geq L \gg r_+\,. \qquad (34)$$

Descomponemos el campo como $\Phi(t, r, \varphi) = e^{-iEt+im\varphi}R(r)$; así, la ecuación radial es:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \left(\frac{f'}{f} + \frac{1}{r}\right)\frac{dR}{dr} + \frac{1}{f}\left(\frac{E^2}{f} - \frac{m^2}{r^2} - \mu^2\right)R = 0\,. \qquad (35)$$

Usando la aproximación WKB, $R(r) \sim e^{iS(r)}$, podemos extraer el número de onda radial $K \equiv S'$

$$K = \frac{1}{\sqrt{f}} \left[\frac{E^2}{f} - \left(\frac{m^2}{r^2} + \mu^2 \right) \right]^{1/2} . \tag{36}$$

e insertarlo en la cuantización de los modos radiales n_r:

$$\pi n_r = \int_{r_+ + \epsilon}^{L} K(r, \ell, E) dr \, . \tag{37}$$

La energía libre de Helmholtz del baño térmico con temperatura $\beta^{-1} = \kappa/2\pi$ es:

$$F = -\int 2\,dm \int \frac{n_r}{e^{\beta E} - 1}\,dE\,, \tag{38}$$

que, cerca del horizonte, sería:

$$F \approx -\frac{\zeta(3)}{\beta^3}\frac{(2\alpha)^{3/2}}{r_+}\int_{1+\bar{\epsilon}}^{\bar{L}} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{L^2}(y^2 - 1)}\right]^{-3/2} dy\,, \tag{39}$$

con los reescalonamientos: $y = r/r_+$, $\bar{L} = L/r_+$ y $\bar{\epsilon} = \epsilon/r_+$.

A partir de la contribución divergente F_ϵ, que viene del límite inferior de la integral, la entropía se puede calcular como: $S_\epsilon = \beta^2 \frac{\partial F_\epsilon}{\partial \beta} = \frac{3\zeta(3)L^3}{\beta^2\sqrt{2r_+\epsilon}}$.

A partir de la contribución divergente F_ϵ, que viene del límite inferior de la integral, la entropía se puede calcular como: $S_\epsilon = \beta^2 \frac{\partial F_\epsilon}{\partial \beta} = \frac{3\zeta(3)L^3}{\beta^2\sqrt{2r_+\epsilon}}$.

Si el resultado se expresa en términos del espesor propio:

$$\xi = \int_{r_+}^{r_+ + \epsilon} \sqrt{g_{rr}}\, dr \approx \frac{L\sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{r_+}}\,, \tag{40}$$

y el "área" del horizonte de eventos $A = 2\pi r_+$, llegamos a la simple expresión:

$$S_\epsilon = \frac{3\zeta(3)A}{8\pi^3\xi}\,. \tag{41}$$

Resumiendo

♣ Consideramos una solución de agujero negro en una teoría $(2+1)$-dimensional que incluye el término de GB, la cual se reduce al agujero negro BTZ cuando $\alpha \to 0$.

Resumiendo

♣ Consideramos una solución de agujero negro en una teoría $(2+1)$-dimensional que incluye el término de GB, la cual se reduce al agujero negro BTZ cuando $\alpha \to 0$.

♣ Los modos cuasinormales escalares muestran un escalamiento lineal entre las frecuencias y el horizonte de eventos $\to$ ausencia de transiciones. La influencia de α es notable.

Resumiendo

♣ Consideramos una solución de agujero negro en una teoría $(2+1)$-dimensional que incluye el término de GB, la cual se reduce al agujero negro BTZ cuando $\alpha \to 0$.

♣ Los modos cuasinormales escalares muestran un escalamiento lineal entre las frecuencias y el horizonte de eventos $\to$ ausencia de transiciones. La influencia de α es notable.

♣ Los modos hidrodinámicos son igualmente puramente imaginarios y, para temperaturas altas, los estados térmicos no sobreviven mucho tiempo.

♣ Los modos cuasinormales espinoriales son menos influenciados por α, especialmente para agujeros negros grandes. No existe isospectralidad. Para V_- los modos son puramente imaginarios y para V_+ existe un punto de transición donde se pierden las oscilaciones.

♣ Los modos cuasinormales espinoriales son menos influenciados por α, especialmente para agujeros negros grandes. No existe isospectralidad. Para V_- los modos son puramente imaginarios y para V_+ existe un punto de transición donde se pierden las oscilaciones.

♣ Los modos cuasinormales escalares y espinoriales muestran estabilidad dinámica y son suficientes para garantizarla.

♣ Los modos cuasinormales espinoriales son menos influenciados por α, especialmente para agujeros negros grandes. No existe isospectralidad. Para V_- los modos son puramente imaginarios y para V_+ existe un punto de transición donde se pierden las oscilaciones.

♣ Los modos cuasinormales escalares y espinoriales muestran estabilidad dinámica y son suficientes para garantizarla.

♣ La forma de T y la ausencia de circunferencia fotónica, confirman la imposibilidad de transiciones de fase.

♣ El límite de entropía de Bekenstein es respetado por este agujero negro, al absorber un objeto.

♣ El método de 't Hooft proporciona una corrección semiclásica universal en $(2+1)$ dimensiones.


Danke
Gracias
Merci
Gracias
Thank
Asante
Thank you
Спасибо
감사합니다
شكرا
Dziękuję
Ευχαριστώ
Kiitos
Tak
有り難う
Obrigado
谢谢
Hvala
有り難う
Tack
תודה
Merci
Danke
Terima kasih
謝謝
Grazie
Thank you
Gracias
ขอบคุณ
ありがとう
감사합니다
شكرا
謝謝
Спасибі
Mulţumesc
Спасибі
Спасибо
Dankon
Хвала
Благодаря
Asante
Děkuju
謝謝
شكرا لك
ありがとう
Teşekkür ederim
有り難う
شكرا لك
有り難う
Köszönöm
Obrigado